SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

1

GODINA VII.
ZAGREB
1956 — 57

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZICARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 200. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 401-T-10080. — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

	Strana
Bazjanac Dr. D., Raketa i ideja o letu u svemir	1
Ćirić T., O bicentričnim poligonima	5
Škarica Stjepan, O verižnim razlomcima	9
Trifunović D., Matematički spektri	14
Димић Платон, Нешто о рачунању с приближним вредностима	19
Zanimljivosti i razno: Takmičenje učenika iz fizike. — É. Galois matematičar, borac i revolucionar. — Bilijun elektrovolta. — Mezoni i hiperoni. — Zadatak za naše najmlađe.	22
Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike. — B. Zadaci iz fizike. — C. Rješenja zadataka iz matematike. — D. Rješenja zadataka iz fizike	28
Vježbe iz matematike za učenike viših razreda gimnazije	36
Vježbe iz matematike za prijemni ispit	39

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
JOVANOVIĆ PETAR, prof. VPŠ, Cetinje
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb

Glavni urednik:

KURELEC ALFRED, profesor VPŠ, Zagreb

Tehnički urednik:

ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafički zavod Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VII. BROJ 1 | ZAGREB, | ŠKOL. GOD. 1956. — 1957.

Raketa i ideja o letu u svemir

Razvitak ideje o letu u svemir

Dr. DAVORIN BAZJANAC, Zagreb

Težnja za osvajanjem visina izražena je u pradavnoj čovjekovoj želji, da izgradi »ljudska krila« i da se vine u visine poput ptice. Prva etapa u ostvarenju te ideje trajala je veoma dugo. Od poznate legende o Dedalu i Ikaru do prvog motornog leta braće Wright u prosincu 1903. godine, kojima je prvi put uspjelo uzletjeti letalom težim od zraka, proteklo je više od četrdeset stoljeća. To je bio historijski datum, kad je čovjek konačno otkrio tajnu mehaničkog letenja. Sva ranija nastojanja i stremljenja ostala su bez uspjeha, jer dotadašnji stepen razvitka nauke i tehnike nije omogućavao, da se riješi problem pogonskog sredstva za ostvarenje potrebne brzine letala.

U prvoj polovici našeg stoljeća avijacija je doživjela nagli i veličajni napredak, kakav se nije mogao ni naslutiti u pionirskim danima njena razvitka. U tom kratkom vremenskom razdoblju brzina mehaničkih letala povećala se od oko 40 *km* na sat, do oko 2400 *km* na sat, a najveća visina, koju je čovjek postigao u raketnom avionu, iznosi oko 27300 metara. Tako nagli razvitak duguje avijacija onim granama nauke i tehnike, koje zajedno sačinjavaju modernu aeronautiku, to jest nauku o letu kroz donje slojeve zračnog oceana.

Slijedeća etapa u ostvarenju težnje za osvajanjem visina, sastojala bi se u nastojanju čovjeka, da se oslobodi okova, koje mu je nametnula planeta na kojoj živi i da ovlada tajinstvenim prostorom iznad Zemljine atmosfere, t. j. da poleti najprije na najbliže nebesko tijelo — Mjesec, a zatim i u beskrajni prostor među druge svjetove.

Sačuvani historijski zapisi svjedoče, da su se mnogi veliki umovi od najstarijih vremena odavali maštanju o letu u svemir. Spomenut ćemo samo Lukijana iz Samosate, koji je još u drugom stoljeću naše ere napisao prvu knjigu (»Vera Historia«) o letu na Mjesec. A kome nisu poznata omiljela djela Jules Vernea i H. G. Wellsa, u kojima su vizionarski izneseni problemi putovanja na Mjesec i druge planete? Iskustvo je pokazalo, da su stvarna postignuća često nadmašila i najfantastičnija predviđanja. Tako su se mnogi suvremenici H. G. Wellsa podsmjehivali njegovoj »ekstravagantnoj« ideji, kad je početkom ovog stoljeća u jednoj svojoj knjizi napisao, da će »aeroplan možda još prije 1950. godine igrati izvjesnu ulogu u vođenju ratova«.

Još mnogo prije otkrića tajne motornog leta došlo se do spoznaje, da bi se let u svemir mogao ostvariti samo pomoću raketnog pogona. Ali u stvari naučno proučavanje raketnog problema i leta u svemir počinje u prvom desetljeću ovog stoljeća. Najveće zasluge na tom području stekli su: K. Ciolkovski u Rusiji, R. Esnault-Pelterie u Francuskoj, R. Goddard u SAD i H. Oberth, E. Sänger i drugi

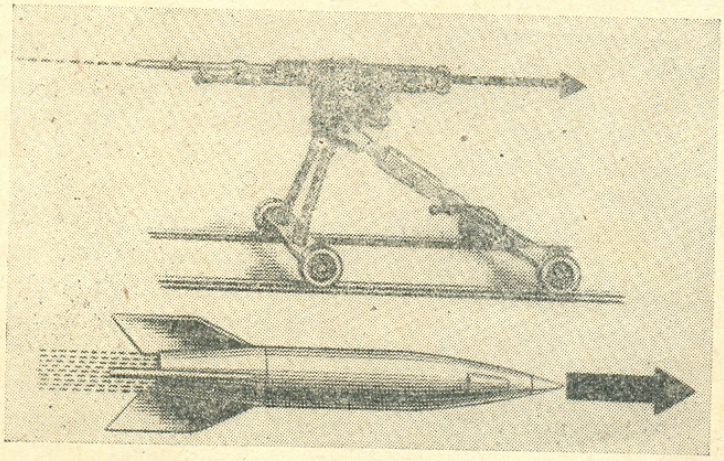
u Njemačkoj. Ti su ljudi, prije svega jasno spoznali u raketi njezine mogućnosti za postizanje velikih visina i za let u svemir. Unatoč mnogim poteškoćama, obeshrabrenjima i podcjenjivanju oni su ustrajali u svojim naporima da dokažu naučnom svijetu da se s pomoću raketnog principa mogu ostvariti navedeni planovi.

Danas su već tisuće stručnjaka iz područja strojogradnje, fizike, kemije, astronomije i medicine učlanjeni u astronautička društva, koja postoje u mnogim zemljama. Časopisi i publikacije tih društava i rezultati rada međunarodnih astronautičkih kongresa jasno pokazuju s kakvom ozbiljnošću najistaknutiji naučni radnici i stručnjaci na području raketne tehnike i aeronautike proučavaju probleme leta izvan Zemljinog zračnog omotača.

U I. svjetskom ratu imala je raketa samo neznatnu primjenu, dok je u II. svjetskom ratu odigrala veoma važnu ulogu. Njezino ostvarenje u obliku njemačke raketne bombe »*V 2*« bilo je više nego dramatično iznenađenje. Bacanje takve bombe u visine ionosfere i na udaljenosti od preko 300 *km* može se — pored epohalnog otkrića atomske bombe — smatrati kao drugi najveći tehnički događaj u ratnoj povijesti našeg stoljeća. Ako apstrahiramo primjenu rakete »*V 2*« u svrhe razaranja i uništavanja tekovina civlizacije, ne može se osporiti, da sa čisto tehničkog gledišta, a posebno s obzirom na perspektive ostvarenja ideje o letu u svemir, izgradnja te gigantske rakete predstavlja velik tehnički uspjeh. To je bio odlučan korak naprijed, kome je slijedio niz mnogih usavršavanja na području raketne tehnike.

Princip gibanja rakete

Već je I. Newton spoznao, da je raketa jedino moguće sredstvo za postizanje velikih visina, pa prema tome i za let u svemir. Ona se razlikuje od ostalih pogonskih sredstava u tome, što njezin potisak praktički ne zavisi od okolne sredine, t. j. nije joj potreban atmosferski kisik i konačno može ona funkcionirati i u vakuumu.



Sl. 1.

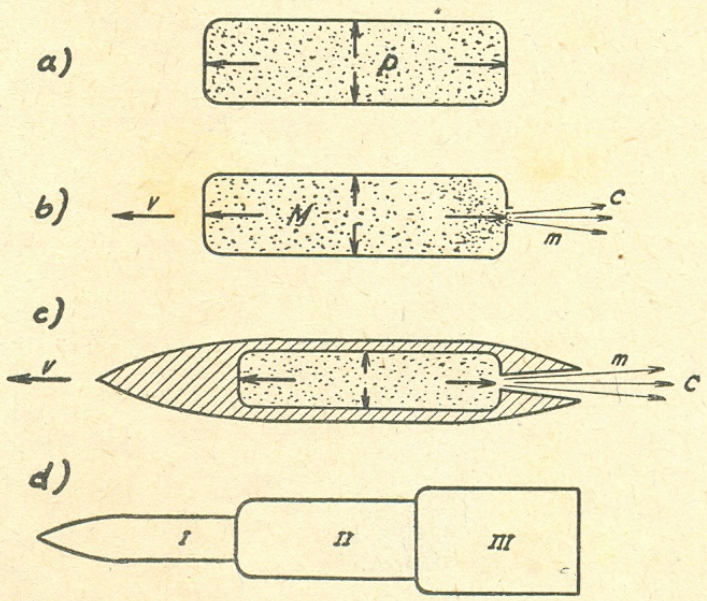
U historijskom razvitku rakete razlikujemo dvije epohe. Prva seže od 13. do početka 20. stoljeća, a druga počinje u prvoj četvrti ovog stoljeća. U prvoj su se za pogon rakete upotrebljavala samo čvrsta goriva (barut), a u drugoj i tekuća.

Što je zapravo raketa i kako nastaje pogonska sila, koja je pokreće?

Raketa je samopokretni (autopropulzioni) projektil, koji se giba na osnovu III. Newtonovog aksioma, koji kaže, da svaka akcija izaziva jednaku i suprotno usmjerenu reakciju. Na tom se zakonu temelje sve sprave i vozila na mlazno-reaktivni pogon.

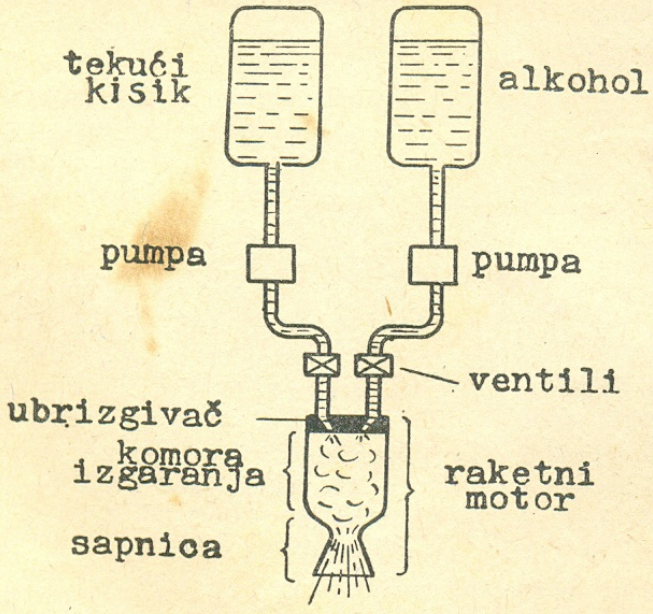
Zakon gibanja rakete može se ilustrirati trzanjem cijevi vatrenog oružja pri opaljenju metka, pri čemu plinovi u barutnoj komori djeluju jednakom silom na projektil i na cijev oružja, ali u suprotnom smjeru. Ako zamislimo, da ispaljujemo metke velikom brzinom, na oružje će djelovati konstantna sila, koja će prouzročiti

njegovo gibanje u suprotnom smjeru, ako se ono može gibati, kao na pr. mitraljez prema sl. 1. Usporedimo li raketu s takvim mitraljezom vidimo, da kod rakete mjesto projektila imamo mlaz plinskih čestica. Jasno je, da će trzanje mitraljeza biti utoliko jače ukoliko se veći broj projektila izbacuje iz cijevi. Jači eksploziv dat će veći pritisak plinova, a to znači da će i trzanje cijevi biti intenzivnije i brzina projektila veća. Brzinom plinskog mlaza nazivamo brzinu, kojom plinovi izlaze iz rakete na njenom zadnjem kraju. Potiskom se naziva reaktivna sila, koja proizvodi gibanje rakete.



Sl. 2.

Kao drugi primjer za ilustraciju zakona gibanja rakete zamislimo da imamo zatvorenu posudu, u kojoj se nalazi eksplozivna plinska smjesa. Izazovemo li eksploziju te smjese, uz pretpostavku da su zidovi posude dovoljno otporni da izdrže pritisak plinova pri eksploziji, posuda će mirovati, jer se plinovi šire na sve strane jednako, pa će se rezultantne sile, koje djeluju na bočne strane, dno i poklopac posude, međusobno poništavati (sl. 2*a*.). Kad bismo u dnu takve posude načinili otvor, bila bi ravnoteža u uzdužnom pravcu posude poremećena zbog istjecanja jednog dijela plinova kroz otvor, i posuda bi se počela gibati u suprotnom smjeru (sl. 2*b*.). Pri tome bi u svakom trenutku umnožak iz mase m i brzine c plinskog mlaza morao biti jednak umnošku iz mase posude i preostalih plinova M i brzine v gibanja posude. To je t. zv. zakon održavanja linearnog impulsa, koji strogo važi za gibanje u praznom prostoru (vakuumu). U svakoj drugoj otpornoj sredini, kao što je na pr. zrak, gibanje bi posude bilo usporeno zbog trenja između zidova posude i okolne sredine. Ta činjenica izražava veoma važno svojstvo rakete, t. j. da se ona najbrže giba upravo u praznom prostoru.

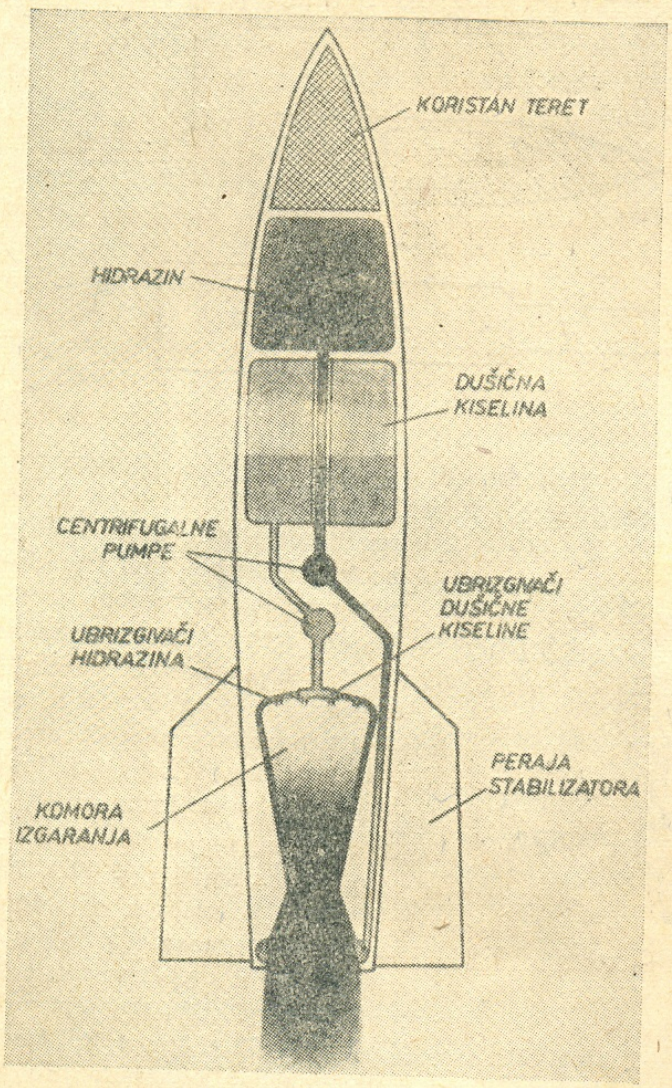


Sl. 3.

Ako sada zamislimo, da smo posudi dali poseban oblik (sl. 2c) i u nju smjestili u vrhu t. zv. koristan teret (na pr. zapaljivu ili svijetleću materiju) i ispod njega pogonsko gorivo, imamo shemu barutne rakete.

Rakete sa čvrstim gorivom (barutne rakete) služe isključivo za kratkotrajno djelovanje. Postoje uglavnom dva tipa: *a)* rakete s neograničenim izgaranjem za projektile namijenjene za kraće udaljenosti i *b)* rakete s ograničenim izgaranjem za pomoćne (startne) rakete pri uzletanju aviona. Kao čvrsto gorivo kod suvremenih barutnih raketa dolazi u obzir nitroglicerinski barut.

Rakete s tekućim gorivom imaju mnogo veće mogućnosti. Glavni su elementi takve rakete: *a)* komora izgaranja, *b)* sapnica ili mlaznica, *c)* ubrizgivači goriva i *d)* ventil za reguliranje dovođenja goriva iz rezervoara za smještaj komponenata goriva (sl. 3.).



Sl. 4.

Pogonski se plinovi razvijaju u komori izgaranja pod velikim pritiskom, koji zavisi od kemijskih karakteristika goriva, brzine izgaranja i poprečnog presjeka grla sapnice. Plinovi izgaranja kemijskih goriva istječu kroz sapnicu u atmosferu nadzvučnom brzinom (oko 2500 *m/sek*). Uloga sapnice sastoji se u pretvaranju pritiska plinova u kinetičku energiju. Reakcija istjecanja plinova stvara potisak koji raketa razvija.

Raketni sistem s tekućim gorivom može biti pušten u pogon i zaustavljen po volji djelovanjem ventila, koji reguliraju dovođenje goriva. To nije moguće kod sistema sa čvrstim gorivom. Sistem ubrizgivača, s pomoću kojih se gorivo ubacuje u komoru izgaranja, služi da se komponente goriva (na pr. alkohol i tekući kisik ili hidrazin i dušična kiselina) raspršе u sitne čestice pri njihovu ulasku u komoru. Sl. 4. prikazuje shemu rakete, koja dobiva pogon s pomoću hidrazina (oksidant) i dušične kiseline (oksidator).

Problem pogonskog goriva

Poboljšanje korisnog efekta rakete zavisi od goriva. Idealno pogonsko gorivo mora imati veliku potencijalnu energiju, t. j. mora biti veoma gusto, da bi pri određenoj težini davalo što veći volumen plinova. Pri njegovu izgaranju treba da se razvija što veća količina topline, jer bi se tako postigla veća brzina istjecanja plinova, a time i veća brzina rakete.

Do nedavno su razni projekti uzimali u obzir samo kemijska goriva, ali u novije se vrijeme razmatra i mogućnost primjene nuklearnog goriva za pogon raketnog motora. U tom bi slučaju, teoretski, bilo dovoljno nekoliko kilograma uranija ili plutonija za pogon rakete težine od oko 1000 tona za putovanje na Mjesec i natrag. Takva bi rješenja, međutim, bila skopčana s veoma velikim poteškoćama, jer se tehnika nuklearnih reaktora nalazi tek u početnoj fazi razvoja. Stoga za sada dolaze u obzir samo rakete s kemijskim gorivom.

Međutim, mnoge od tih poteškoća mogu se izbjeći s pomoću sastavljenih ili višestepenih raketa (sl. 2*d*). To su sistemi od nekoliko raketa međusobno povezanih u jednu cjelinu. Pojedini stepeni imaju zadatak, da ubrzaju ostale rakete sistema. Kad pojedini stepeni takve sastavljene rakete utroše svoje gorivo, oni se automatski odvajaju i padaju na Zemlju. Tako dobivena brzina sistema povećava se djelovanjem raketnog motora slijedeće rakete i taj se proces dalje ponavlja. Brzina posljednje rakete jednaka je sumi maksimalnih brzina svake pojedine rakete sistema. Na taj se način mogu ostvariti t. zv. kozmičke brzine, koje su potrebne za svladavanje Zemljine gravitacije.

Prvi korak u ostvarenju leta u prostor izvan Zemljinog zračnog omotača bit će odašiljanje umjetnih Zemljinih satelita bez posade, koji će biti lansirani u Međunarodnoj geofizičkoj godini 1957/58. u svrhu istraživanja visokih slojeva atmosfere. To će biti zapravo minijaturni naučni laboratorij, koji će kružiti izvjesno vrijeme oko Zemlje na visini od nekoliko stotina kilometara. Ostvarenje takvih »minimalnih« satelita predstavljat će, bez sumnje, veliko dostignuće za unapređenje saznanja o svemiru, a posebno za let u svemirski prostor. O tim umjetnim satelitima bit će govora u jednom od narednih brojeva ovog časopisa.

O bicentričnim poligonima

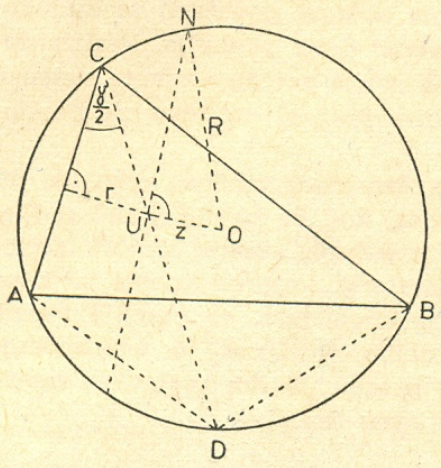
TATIJANA ĆIRIĆ, Novi Sad

Poznato je već učeniku osmogodišnje škole da se oko svakog trougla može opisati i u njega upisati krug i da su centri ta dva kruga kod ravnostranog trougla ista tačka, u koju padaju i ortocentar i težište tog ravnostranog trougla. Tražeći položaj tih karakterističnih tačaka kod raznih vrsta trouglova ubrzo se konstatuje i lako dokazuje da te četiri tačke kod ravnokrakog trougla leže na visini trougla, a kod raznostranog trougla da tri od njih (ortocentar V, težište T i centar opisanog kruga O) leže uvek na istoj pravoj i da je uvek $\overline{VT} = 2 \cdot \overline{TS}$. Ta prava se zove Eulerova prava u počast L. Euleru (1707—1783), čuvenom matematičaru XVIII veka, koji je prvi ispitivao te odnose i dokazao gornju relaciju. Euler je isto tako našao i relaciju između centralne razdaljine OU opisanog i upisanog kruga i poluprečnika R i r tih krugova. Do te relacije možemo doći na sledeći način.

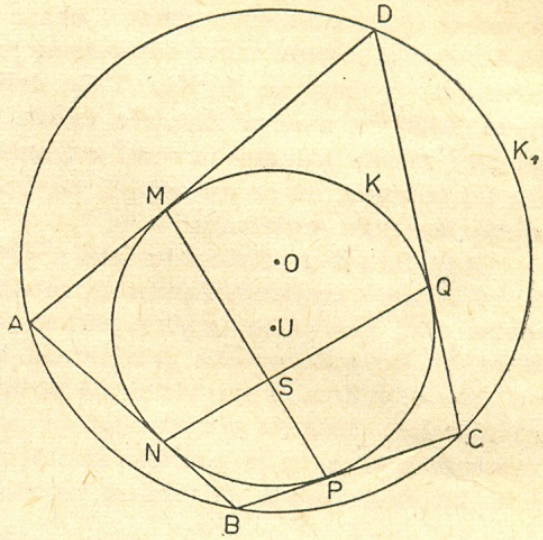
Povučemo pravu CD kroz U, centar upisanog kruga u $\triangle ABC$. Duži $\overline{DA}$ i $\overline{DB}$ su jednake kao tetive nad jednakim lucima. $\triangle AUD$ je ravnokrak (uglovi na osnovi $\overline{AU}$ su jednaki) pa je sad $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DU}$. Po teoremi o otsečcima tetiva imamo $\overline{UC} \cdot \overline{UD} = UN^2 = R^2 - z^2$. Po sinusnoj teoremi za $\triangle ADC$ imamo $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{AD}}{2R}$ ili $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{DU}}{2R}$. Isto tako je $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{\overline{UC}}$, pa je prema tome $\frac{r}{\overline{UC}} = \frac{\overline{DU}}{2R}$ dakle $\overline{DU} \cdot \overline{UC} = 2Rr$. Prema tome je tražena veza između centralne razdaljine z, poluprečnika R i r

$$2Rr = R^2 - z^2.$$

Pređimo sad na četverouglove. Lako se dokazuje da se krug može opisati oko četverougla *ABCD* samo ako su suprotni uglovi α i γ, β iδ suplementni, da je to potreban i dovoljan uslov da neki četverougao bude tetivan. Isto tako je neki četverougao tangentan, tj. u njega se može upisati krug ako je zbir jednog para suprotnih strana, $a + c$, jednak zbiru drugih dveju suprotnih strana, $b + d$. Postavlja se odmah pitanje ima li četverouglova koji bi bili u isti mah i tangentni i tetivni, ili u kratko rečeno *bicentrični*, onako isto kako je svaki trougao bicentričan.



Sl. 1.



Sl. 2.

Lako se možemo uveriti da oba gornja uslova od paralelograma ispunjava samo kvadrat, od trapeza samo onaj ravnokraki trapez, gde je krak $b = \frac{a+c}{2}$, i deltoid koji osovina simetrije deli na dva pravougla trougla. Ima li i drugih četverouglova koji bi bili bicentrični? Ako ih ima, kako se konstruišu, kakav je odnos između poluprečnika opisanog i poluprečnika upisanog kruga i centralne razdaljine tih krugova itd.?

Ako u bicentričnom četverouglu spojima dodirne tačke strana i upisanog kruga, dobivamo dve uzajamno normalne tetive. I obrnuto ako u krajnjim tačkama uzajamno normalnih tetiva položimo tangente, ove će graditi bicentričan četverougao.

Neka je četverougao *ABCD* bicentričan. Zbir uglova u četverouglovima *SPCQ* i *SMAN* iznosi 360⁰, tj.

$$\sphericalangle S + \sphericalangle P + \sphericalangle C + \sphericalangle Q = 360^0$$
$$\sphericalangle S + \sphericalangle M + \sphericalangle A + \sphericalangle N = 360^0$$

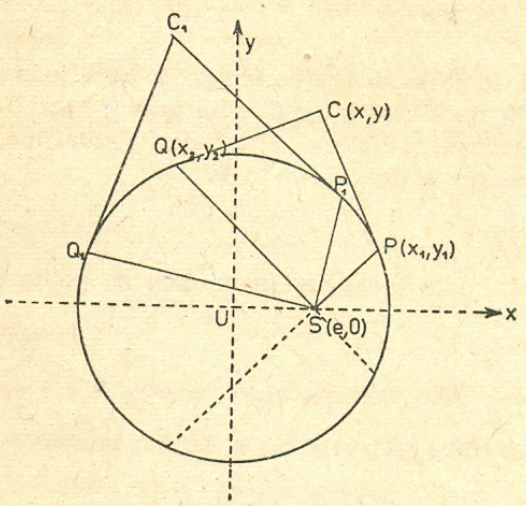
Saberemo li ove dve jednakosti dobivamo:

(1) $$2\sphericalangle S + (\sphericalangle A + \sphericalangle C) + (\sphericalangle Q + \sphericalangle N) + (\sphericalangle P + \sphericalangle M) = 720^0.$$

Međutim je $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^0$, jer je *ABCD* po učinjenoj pretpostavci tetivan četverougao. Isto tako su i uglovi Q i N, P i M suplementni jer se ugao između tangente i tetive meri polovinom luka koji je u tom uglu. Ostaje prema tome $2\sphericalangle S = 180^0$ ili $\sphericalangle S = 90^0$. Time je naša prva tvrdnja dokazana. Obrnuto, ako je $\sphericalangle S = 90^0$ i povučemo u tačkama *MNPQ* tangente koje čine tangentni četverougao

$ABCD$, ostaje u relaciji (1) da je $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^0$, dakle je tangentni četverougao u isti mah i tetivan.

Ovim smo pokazali da se može naći po volji mnogo četverouglova (jer su smer normalnih tetiva kao i sama tačka S proizvoljni) koji su svi opisani oko istog kruga K a u isti mah su i tetivni četverouglovi. Pokazaćemo da su svi upisani u isti krug K_1.



Sl. 3.

Uzećemo da se prav ugao sa temenom u tački S obrće oko te tačke i potražićemo geometrisko mesto tačaka C, C_1, $C_2 \ldots$ u kojima se seku tangente povučene u tačkama P, P_1, $P_2 \ldots$, Q, Q_1, $Q_2 \ldots$ Poslužićemo se u tu svrhu metodom analitičke geometrije. Neka je krug K dat jednačinom $x^2 + y^2 = r^2$. Jednačina polare tačke C (X, Y) je u odnosu na ovaj krug $Xx + Yy = r^2$. Tačke P i Q čije su koordinate x_1 i y_1 odnosno x_2 i y_2 leže i na krugu i na polari, a ujedno je prava SP normalna na pravoj SQ. To je sve izraženo jednačinama:

(2) $\quad x_1^2 + y_1^2 = r^2$

(3) $\quad x_2^2 + y_2^2 = r^2$

(4) $\quad x_1 X + y_1 Y = r^2$

(5) $\quad x_2 X + y_2 Y = r^2$

$$koef_{SP} = \frac{y_1}{x_1 - e}$$

$$koef_{SQ} = \frac{y_2}{x_2 - e},$$

što daje zbog normalnosti ovih pravih uslov

(6) $$y_1 y_2 = (x_1 - e) \cdot (e - x_2)$$

Imamo pet jednačina iz kojih možemo izbaciti veličine x_1, y_1, x_2, y_2 i ostaće nam jedna jednačina, traženo geometrisko mesto, u kojoj će X, Y biti tekuće koordinate, a osim toga i konstantne veličine r i e. Eliminacija se lako izvede. Oduzmemo jednačine (2) i (3), to nam daje $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$ ili

(7) $$x_1 - x_2 = -\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{x_1 + x_2}$$

Ako oduzmemo jednačine (4) i (5), a potom ih saberemo, imamo

(8) $\quad X(x_1 - x_2) + Y(y_1 - y_2) = 0$ $\quad$ i

(9) $\quad X(x_1 + x_2) + Y(y_1 + y_2) = 2r^2$

Ako u jednačinu (8) uvrstimo nađenu vrednost (7) za $x_1 - x_2$, i podelimo sa $y_1 - y_2$ dobivamo sistem

$$Y(x_1 + x_2) - X(y_1 + y_2) = 0$$
$$X(x_1 + x_2) + Y(y_1 + y_2) = 2r^2$$

Odavde je

(10) $$x_1 + x_2 = \frac{2r^2 X}{x^2 + y^2}$$

(11) $$y_1 + y_2 = \frac{2r^2 Y}{x^2 + y^2}$$

Saberemo li jednačine (2) i (3) imamo $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 2r^2$, što se može pisati i u obliku $(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 2r^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2$. Unesemo li ovdje vrednosti (6), (10) i (11), posle jednostavnih algebarskih transformacija dobivamo kao rezultat eliminacije

$$X^2 + Y^2 + 2\frac{er^2}{r^2 - e^2}X - \frac{2r^4}{r^2 - e^2} = 0 \tag{12}$$

a to je kako znamo krug. Ta nam jednačina ujedno kazuje da je centar tog kruga K_1 na X osovini, dakle na pravoj kroz U (centar upisanog kruga) i S (tačku preseka normalnih tetiva.) Centralna razdaljina z jednaka je apsolutnoj veličini apscise centra kruga K_1, a to je

$$z = \frac{er^2}{r^2 - e^2} \tag{13}$$

Ista jednačina nam daje za poluprečnik kruga K_1

$$R^2 = z^2 + \frac{2r^4}{r^2 - e^2} \tag{14}$$

Ako tražimo vezu između R, r i centralne razdaljine z, treba da eliminišemo iz (13) i (14) veličinu e. Iz (14) imamo $r^2 - e^2 = \frac{2r^4}{R^2 - z^2}$, to unesemo u (13). To nam daje $z = \frac{R^2 - z^2}{2r^2} \cdot e$ ili $e = \frac{2r^2z}{R^2 - z^2}$. Ako sad tu vrednost unesemo u (14), posle izvesnih algebarskih transformacija imamo

$$2r^2(R^2 + z^2) = (R^2 - z^2)^2$$

Ovu je relaciju našao Eulerov učenik i prijatelj Nikolaus Fuss (1755—1826).

Mi smo kroz tačku S sasvim proizvoljno povukli dve uzajamno normalne tetive, dakle je sasvim proizvoljno određena i presečna tačka tangenata, tj. prvo teme bicentričnog četverougla, a time i zatvorena izlomljena linija od četiri duži koja gradi taj četverougao. Prema gornjem vidi se da će drugom položaju tetiva kroz S odgovarati druga, ali opet zatvorena izlomljena linija istih osobina. Došli smo do interesantnog rezultata: ako se na jednom krugu K_1 može počev od jedne tačke povući zatvorena izlomljena linija od četiri duži koje su tangente nekog drugog kruga K, onda se to može i polazeći od ma koje druge tačke na krugu K_1. Francuski matematičar Poncelet (1788—1867) pokazao da sličan teorem vredi i za druge kupine preseke a ne samo za krug.

Bicentričnim četverouglovima pripadaju sve osobine tangentnih i tetivnih četverouglova. Na primer:

1) Dijagonale i tetive koje spajaju dodirne tačke prolaze kroz istu tačku (tačka S, sl. 2). Ovo je osobina tangetnih četverouglova.

2) Površina tetivnog četverougla je (vidi Kurepa-Škreblin, Trigonometrija, 1947, str. 183)

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

gde je $2s = a + b + c + d$.

Kod bicentričnog četverougla dolazi još relacija $a + c = b + d$, dakle $s = a + c = b + d$, pa je obrazac za površinu sad $P = \sqrt{abcd}$.

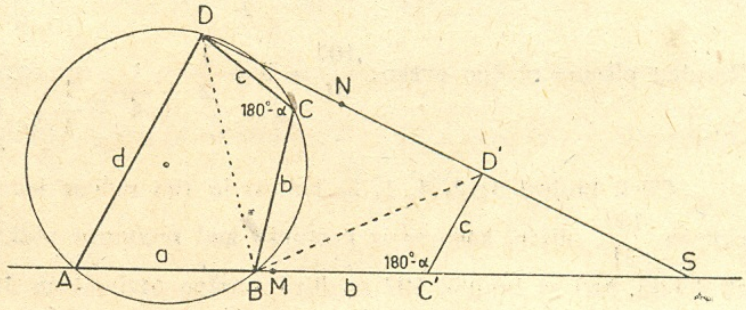
Primenimo li ovaj obrazac na bicentričan trapez, gde je $b = \frac{a+c}{2}$ imamo s jedne strane poznatu formulu $P = \frac{a+c}{2}h$, a po ovom obrascu imamo $P = b\sqrt{ac}$. Ako ovo dvoje izjednačimo, imamo $h = \sqrt{ac}$. Dakle je kod bicentričnog trapeza

aritmetička sredina osnovica jednaka kraku, a geometriska sredina je jednaka visini tog trapeza. Kako je visina uvek manja od kraka ravnokrakog trapeza došli smo i ovim putem do poznatog rezultata da je geometriska sredina dve duži (broja) uvek manja od njihove aritmetičke sredine, uz prećutnu pretpostavku da su te dve duži različite.

Bicentrični deltoid. Ovde je $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, $r = \frac{P}{s} = \frac{ab}{a+b}$, prema tome je $2r = \frac{2ab}{a+b}$, tj. prečnik upisanog kruga u bicentrični deltoid je harmoniska sredina njegovih nejednakih strana.

3) Konstrukcija bicentričnog četverougla, ako su date njegove strane a, b, c, d, $(d = a + c - b)$ izlazi iz konstrukcije tetivnog četverougla kad su date sve njegove strane.

Neka je $ABCD$ traženi tetivni četverougao. Zaokrenimo $\triangle BCD$ oko tačke B, tako da tačka C dođe u položaj C', a tačka D u D'. Zbog uslova $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^0$ $C'D'$ je paralelno sa AD. Neka je tačka S tačka preseka prave DD' sa AB, imamo proporciju $AS : C'S = d : c$. Time je položaj tačke S na pravoj AB određen. Kroz tačku N, podnožje visine ravnokrakog trougla $BD'D$, prolazi i srednja linija trapeza $AC'D'D$, pa je prema tome tačka N presek kruga opisanog oko M (sredine duži AC') sa poluprečnikom $\frac{d+c}{2}$ (veličina srednje linije trapeza!) i kruga opisanog iznad BS kao prečnika. Tačke N i S određuju pravu SD, i sad je lako naći tačke D i C.



Sl. 4.

Ova razmatranja se mogu, kako je to već N. Fuss uradio, proširiti i na poligone sa 5, 6, 8 i više strana. Može se pokazati da osim pravilnih poligona, koji su uvek bicentrični, postoje i drugi bicentrični poligoni, za koje se mogu opet naći relacije za centralnu razdaljinu i poluprečnike opisanog i upisanog kruga.

O verižnim razlomcima

STJEPAN ŠKARICA, Zagreb

1. Verižni razlomak. *a)* Svaki se racionalni broj može napisati u obliku reduciranog razlomka $\frac{p}{q}$, t. j. razlomka, u kojemu su brojnik p i nazivnik q cijeli relativno prosti brojevi; na pr. $\frac{3}{1}, \frac{1}{25}, \frac{107}{31}, \frac{121}{159}$. Svaki se običan razlomak može pretvoriti u decimalan, i to u konačan ili beskonačan; u drugom slučaju on je svagda čisto ili mješovito periodski; na pr. $\frac{3}{25} = 0{,}12$; $\frac{18}{11} = 1{,}\dot{6}3$; $\frac{53}{72} = 0{,}73\dot{6}1\dot{}$. Decimalne razlomke obično zamjenjujemo njihovim približnim vrijednostima uzimajući toliko decimala, koliko ih traži stupanj točnosti računa.

b) Vrijednost razlomka zavisi o vrijednosti njegova brojnika i nazivnika, a kad ga pretvorimo u decimalni, onda mu vrijednost zavisi o znamenkama, koje imaju brojnu i mjesnu vrijednost.

Vrijednost razlomka možemo učiniti zavisnom od niza cijelih brojeva, koji također imadu brojnu i mjesnu vrijednost, kako pokazuje ovaj primjer:

$$\frac{107}{31} = 3 + \frac{14}{31} = 3 + \frac{1}{\frac{31}{14}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{3}{14}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{14}{3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3}}} = 3 +$$

$$+ \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

Rezultat pišemo obično ovako: $\frac{107}{31} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$ ili simbolički: $\frac{107}{31} = 3;\ 2, 4, 1, 2.$

Cijeli brojevi 3; 2, 4, 1, 2, kojima je tim redom jednoznačno određena vrijednost razlomka $\frac{107}{31}$, nijesu, kako se iz postupka kod pretvorbe vidi, ništa drugo, nego kvocijenti, što se dobiju, kad se brojnik 107 razdijeli verižno nazivnikom 31:

107	31	3
14	3	2
2	1	4
		1
		2

Razdijelivši dakle na pr. 121 sa 159 verižno, možemo odmah pisati:

$$\frac{121}{159} = 0;\ 1, 3, 5, 2, 3.$$

121	159	0
121	38	1
7	3	3
1	0	5
		2
		3

Izraz oblika $a_1;\ a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{m-1}} + \frac{1}{a_m}$ zove se *(običan) verižni razlomak;* brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m$ su njegovi *članovi;* pisan simbolički sliči na decimalni razlomak: prvi član a_1 je cio pozitivan broj ili nula, a označuje cijele verižnog razlomka, dok su ostali članovi cijeli pozitivni brojevi, pa, kao što i decimale, imaju svoju brojnu i mjesnu vrijednost. Verižni se razlomak zove *konačan* ili *beskonačan* prema tome, je li mu broj članova konačan ili beskonačan. Kad je beskonačan, može biti *čisto* ili *mješovito periodski,* a i *neperiodski.* Kako je kod verižnog dijeljenja dvaju cijelih brojeva p i q broj kvocijenata nužno konačan, *svaki verižni razlomak, koji je jednak racionalnom broju* $\frac{p}{q}$, *nužno je konačan.*

Napomena. Kako je kod verižnog dijeljenja dvaju relativno prostih brojeva posljednji divizor $= 1$, poslje nji je član a_m uvijek veći od 1, ali se prema potrebi može zamijeniti s dva člana: $a_m - 1, 1$.

Zadaci. Pretvori u verižni razlomak: **1.** $\frac{17}{10}$, **2.** $\frac{235}{53}$, **3.** $\frac{509}{111}$, **4.** $\frac{2003}{396}$, **5.** $\frac{14}{25}$, **6.** $\frac{2896}{5697}$!

Rezultati: **1.** 1; 1, 2, 3; **2.** 4; 2, 3, 3, 2; **3.** 4; 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2; **4.** 5; 17, 4, 1, 1, 2; **5.** 0; 1, 1, 3, 1, 2; **6.** 0; 1, 1, 29, 2, 15, 3.

2. Približne vrijednosti verižnog razlomka. *a)* Brojevi 4, 4,3, 4,25, 4,251, 4,2513 jesu približne vrijednosti razlomka $\frac{137}{32} = 4{,}25125$, i to su: 4, 4,25, 4,251 približno manje, a 4,3, 4,2513 približno veće vrijednosti toga razlomka.

Analogno tome kažemo, da su razlomci: $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3; 2$, $\frac{31}{9} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

$= 3; 2, 4$, $\frac{38}{11} = 3; 2, 4, 1$ *približne vrijednosti verižnog razlomka* $3; 2, 4, 1, 2 = \frac{107}{31}$.

Zadatak: Potvrdi računom, da su približne vrijednosti razlomka $0; 1, 3, 5, 2, 3 = \frac{121}{159}$ redom: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{16}{21}, \frac{35}{46}$!

b) Ako verižni razlomak ima mnogo članova, izračunavanje njegovih približnih vrijednosti primjenom pravila o računanju s običnim razlomcima vrlo je nepraktično. Ima drugi način, kojim se brzo i lako mogu odrediti približne vrijednosti verižnog razlomka.

Neka je $\frac{p}{q} = a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m$, a njegove približne vrijednosti neka su redom: $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \ldots, \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$. Neka je osim toga $p_0 = 1$, $q_0 = 0$! Kako je prva približna vrijednost $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1}$, možemo pisati: $p_1 = a_1$, $q_1 = 1$. Druga je približna vrijednost $\frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2} = p_1 + \frac{p_0}{a_2} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0}$. Kako je $\frac{p_3}{q_3} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$, izraz za $\frac{p_3}{q_3}$ možemo dobiti, ako u izraz za $\frac{p_2}{q_2}$ mjesto a_2 stavimo $a_2 + \frac{1}{a_3}$, pa nalazimo: $\frac{p_3}{q_3} = \frac{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) p_1 + p_0}{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) q_1 + q_0} =$

$$= \frac{(a_2 p_1 + p_0) + \frac{p_1}{a_3}}{(a_2 q_1 + q_0) + \frac{q_1}{a_3}} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1}.$$

Općeno: Iz

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \text{ izlazi } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

Budući da je izraz za $\frac{p_n}{q_n}$ valjan za $n = 2$ i $n = 3$, on je prema izrazu za $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ valjan i za $n = 4$, a po tom i za $n = 5$, $n = 6$, i t. d., t. j. za svako $n \geqq 2$.

Brojnik p_n i nazivnik q_n približne vrijednosti verižnog razlomka $a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m$ izračunavaju se dakle prema formulama $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

Na pr. U prvom stupcu izračunani su brojnici, a u drugom nazivnici približnih vrijednosti razlomka $3; 2, 4, 1, 2$:

$p_0 = 1$	$q_0 = 0$
$p_1 = 3$	$q_1 = 1$
$p_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$	$q_2 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$
$p_3 = 4 \cdot 7 + 3 = 31$	$q_3 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$
$p_4 = 1 \cdot 31 + 7 = 38$	$q_4 = 1 \cdot 9 + 2 = 11$
$p_5 = 2 \cdot 38 + 31 = 107$	$q_5 = 2 \cdot 11 + 9 = 31$

Približne su dakle vrijednosti razlomka $3; 2, 4, 1, 2$ redom: $\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{31}{9}, \frac{38}{11}$, a prava mu je vrijednost $\frac{107}{31}$.

Približne vrijednosti razlomka 0; 1, 3, 5, 2, 3 su redom: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{16}{21}, \frac{35}{46}$, a prava $\frac{121}{159}$ prema stupcima A, a razlomka 5; 17, 4, 1, 1, 2 redom $\frac{5}{1}, \frac{86}{17}, \frac{349}{69}, \frac{435}{86}, \frac{784}{155}$, dok mu je prava vrijednost $\frac{2003}{396}$ (prema stupcima B).

A		B	
1	0	1	0
0	1	5	1
1	1	86	17
3	4	349	69
16	21	435	86
35	46	784	155
121	159	2003	396

Zadaci: Izračunaj približe i pravu vrijednost ovih verižnih razlomaka: **1.** 1; 2, 3, 4, 5, 6; **2.** 0; 2, 4, 4, 3, 4, 2; **3.** 1; 1, 1, 1, 1, 1, 1; **4.** 10; 1, 11, 2, 12, 3, 13.

Rezultati: **1.** $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{43}{30}, \frac{225}{157}, \frac{1393}{972}$; **2.** $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{17}{38}, \frac{55}{123}, \frac{237}{530}, \frac{529}{1183}$; **3.** $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}$; **4.** $\frac{10}{1}, \frac{11}{1}, \frac{131}{12}, \frac{273}{25}, \frac{3407}{312}, \frac{10494}{961}; \frac{139829}{12805}$.

c) Kako u izrazima za p_n i q_n nema negativnih brojeva, izlazi, da je $p_{n-1} < p_n$, $q_{n-1} < q_n$, t. j. brojnici i nazivnici približnih vrijednosti verižnog razlomka rastu, kad n raste. Prema istim formulama nalazimo, da je

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = p_1 (a_2 q_1 + q_0) - (a_2 p_1 + p_0) q_1 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = (-1)^1;$$
$$p_2 q_3 - p_3 q_2 = p_2 (a_3 q_2 + q_1) - (a_3 p_2 + p_1) q_2 = -1 \cdot (p_1 q_2 - p_2 q_1) = (-1)^2;$$
$$p_3 q_4 - p_4 q_3 = p_3 (a_4 q_3 + q_2) - (a_4 p_3 + p_2) q_3 = -1 \cdot (p_2 q_3 - p_3 q_2) = (-1)^3.$$

Zaključkom od n na $n+1$ kao pod *b)* našli bismo, da je općeno:

$$p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^n.$$

Odatle izlazi, da su p_n i q_n relativno prosti brojevi, jer kad bi imali mjeru > 1, bila bi lijeva strana posljednje jednadžbe višekratnik te mjere pa ne bi mogla biti jednaka desnoj. *Sve su* dakle *približne vrijednosti, a i prava vrijednost, (konačnog) verižnog razlomka reducirani razlomci,* što potvrđuju i svi primjeri pod *b)*.

Prema posljednjoj jednadžbi je

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}.$$

Ako je $\frac{p}{q} = a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m$, možemo prema „Napomeni“ u t. 1. pretpostaviti, da je m neparan broj. Prema tome možemo pisati:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = -\frac{1}{q_1 q_2},$$
$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = +\frac{1}{q_2 q_3},$$
$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} = -\frac{1}{q_3 q_4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - \frac{p}{q} = +\frac{1}{q_{m-1} q}.$$

Kako je $q_n > q_{n-1}$, razlomci na desnim stranama tih jednadžbi bivaju sve manji po apsolutnoj vrijednosti, pa kad zbrojimo jednadžbe 1. i 2., 3. i 4., 5. i 6., i t. d., nalazimo, da je

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \ldots < \frac{p_{m-2}}{q_{m-2}} < \frac{p}{q}.$$

Isto tako, kad zbrojimo jednadžbe 2. i 3., 4. i 5., 6. i 7., i t. d., pa uvažimo posljednju, dobivamo

$$\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_4}{q_4} > \frac{p_6}{q_6} > \ldots > \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} > \frac{p}{q}.$$

Prema tome *približne vrijednosti verižnog razlomka s neparnim indeksom rastu, a s parnim padaju prema njegovoj pravoj vrijednosti, kad indeks raste.* Možemo dakle pisati:

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

Osim toga je $\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{q_n^2}$.

Na pr. Približne su vrijednosti verižnog razlomka 3; 2, 4, 1, 2 redom $\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{31}{9}, \frac{38}{11}$, a prava $\frac{107}{31}$; doista je $\frac{3}{1} < \frac{31}{9} < \frac{107}{31} < \frac{38}{11} < \frac{7}{2}$; osim toga je na pr. $\left|\frac{31}{9} - \frac{107}{31}\right| < \frac{1}{9^2}$.

3. Sumjerljive i nesumjerljive dužine. *a)* Ako su a, b i d dužine, a p i q cijeli pozitivni brojevi i relativno prosti, pa se dužina $d = \frac{b}{q}$ u dužini a nalazi točno p puta, t. j. $a = pd$, dužina je d najveća zajednička mjera dužina a i b, a omjer $a : b$ jednak je racionalnom broju $\frac{p}{q}$, koji je prema pređašnjemu jednak određenom konačnom verižnom razlomku. Za takve dužine a i b kažemo, da su *sumjerljive.*

Vrijedi i obrnuto: Ako je omjer dužina a i b jednak konačnom verižnom razlomku, one su sumjerljive; njihovu najveću zajedničku mjeru d dobijemo nakon konačnog broja dijeljenja kao posljednji divizor, kad dužine a i b razdijelimo verižno.

Hipotenuze t. zv. Pitagorinih trokuta sumjerljive su s jednom i s drugom katetom; na pr. hipotenuza c pravokutnog trokuta s katetama $a = 20d$, $b = 21d$ jednaka je $29 \cdot \frac{a}{20} = 29 \cdot \frac{b}{21}$, i prema tome je $\frac{c}{a} = 1; 2, 4, 2; \frac{c}{b} = 1; 2, 1, 1, 1, 2$.

b) Ako je d dijagonala kvadrata, a a stranica, onda je $d^2 = 2a^2$, $d < 2a$ ili $d - a < a$, pa je prema tome

$$\frac{d}{a} = 1 + \frac{d-a}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{d-a}}; \quad \frac{a}{d-a} = \frac{a(d+a)}{d^2-a^2} = \frac{d+a}{a} = 2 + \frac{d-a}{a} = 2 + \frac{1}{\frac{a}{d-a}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{a}{d-a}}} = \ldots$$

Izlazi dakle, da je $\frac{d}{a} = 1; 2, 2, 2, \ldots$

Član 2 toga verižnog razlomka ponavlja se do u beskonačnost; taj razlomak je dakle ne samo beskonačan, nego je i periodski, i to čisto periodski jer mu period počinje odmah iza cijelih. Slično kao i kod decimalnih razlomaka pišemo: $\frac{d}{a} = 1;(2)$. Omjer dijagonale kvadrata prema njegovoj stranici nije dakle racionalan broj ili, kraće, on je *iracionalan.*

Po Pitagorinu poučku je $\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1}$; broj $\sqrt{2} = 1;(2)$ je dakle iracionalan; doista među racionalnim brojevima nema broja, čiji bi kvadrat bio jednak 2.

c) Ako je s_{10} stranica konveksnog, a z_{10} stranica zvjezdastog pravilnoga 10-erokuta upisanih kružnici s polumjerom r, onda je $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$, t. j. $r - s_{10} < s_{10}$, i prema tome je

$$\frac{r}{s_{10}} = 1 + \frac{r - s_{10}}{s_{10}} = 1 + \frac{1}{\frac{s_{10}}{r - s_{10}}} = 1 + \frac{1}{\frac{r}{s_{10}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{r}{s_{10}}}} = 1;(1);$$

$$\frac{r}{z_{10}} = \frac{r}{r + s_{10}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{s_{10}}{r}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{r}{s_{10}}}} = 0;(1).$$

Dužine r i s_{10} pa r i z_{10} su dakle nesumjerljive, a omjeri

$$\frac{r}{s_{10}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1;\ (1), \quad \frac{r}{z_{10}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0;(1)$$

su iracionalni brojevi.

d) I stranica a istostraničnoga trokuta nesumjerljiva je s njegovom visinom v, jer je

$$\frac{a}{v} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{3} = 1 + \frac{1}{x_1};\quad x_1 = \frac{3}{\sqrt{12}-3} = \frac{\sqrt{12}+3}{1} = 6 + \frac{1}{x_2};$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{12}-3} = \frac{\sqrt{12}+3}{3} = 2 + \frac{1}{x_3};\quad x_3 = \frac{3}{\sqrt{12}-3} = x_1,$$

i prema tome je $\frac{a}{v} = 1;(6,2)$.

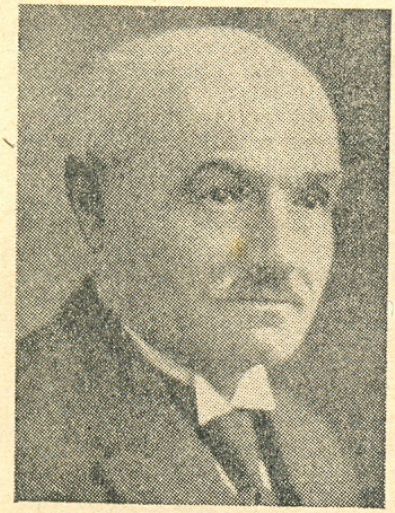
(Svršetak članka u slijedećem broju)

Matematički spektri*

DRAGAN TRIFUNOVIĆ, Beograd

...Petrovićeva misao bacila je i još uvek baca svetlo u svim pravcima matematičkih nauka, i mi možemo s pravom reći da smo joj bili puni sledbenici, usvajajući je životno, po našoj meri, neokrnjivši joj sadržinu.

Velika i snažna ličnost Mihaila Petrovića, matematičara (6 V 1868—8 VI 1943), ima svoje određeno i ne tako malo mesto u istoriji matematičkog stvaranja kod nas. Njegov neobično interesantan život i njegovo veliko naučno delo nisu danas, nažalost, u onoj meri poznati kako to zaslužuju. Naročito u srednjoj školi radovi Mihaila Petrovića se obrađuju slabo ili nikako. O »Miki Alasu« učenik doznaje ponešto iz anegdota koje nastavnik ispriča. Međutim, naučni i stručni rad Mihaila Petrovića ostao je poznat i pristupačan malom broju ljudi; šira čitalačka publika — učenici srednjih škola saznaju o tim radovima vrlo malo. Čudnovato je, ali nažalost istinito, da naš učenik posle osam godina učenja osnovnih elemenata matematike ne upozna delo i život jednog od pionira matematičke nauke u nas, čoveka koji je vrlo mnogo zadužio baš srednjoškolsku matematiku.



Na Petrovićeve radove iz elementarne i više matematike treba stalno ukazivati. Oni to zaslužuju. Razrađivanje ideja Mihaila Petrovića u okviru srednjoškolske matematike značilo bi usavršavanje elementarnih metoda, a to bi nastavu učinilo zanimljivijom i korisnijom. Petrović je dao riznicu ideja i stavova koji će se tek dokazivati i o kojima će se još raspravljati. On je imao intuiciju; s neobičnom sposobnošću da shvati nalet novih ideja čim se samo pojave na horizontu; pronalazio je interesantne probleme za rešavanje i davao im elegantna rešenja.

---

* Osmog juna ove godine navršilo se trinaest godina od smrti Mihaila Petrovića. Ovaj članak je napisan kao znak sećanja na velikog matematičara.

Sistematsko ukazivanje na čitanje Petrovićevih članaka iz oblasti elementarne matematike pridonosi tananom razvijanju funkcionalnog mišljenja, koje treba da bude cilj nastave matematike u srednjoj školi. U Petrovićevim radovima je sve sadržano: razvijanje sposobnosti uopštavanja, kombinovanja, sistematizovanje stečenog znanja, kao i razvijanje samostalnih navika u postavljanju funkcionalnih veza između promenljivih veličina. Isticanje Petrovićevih radova poslužiće učenicima kao primer kako se u srednjoškolskoj matematici daju novi prilozi.

Time smo se dotakli jednoga, za đake i nastavne krugove, osetljivog pitanja, koje se u zadnje vreme kod nas, a donekle i u inostranstvu, postavlja u prvi plan.

Koncepcija nastave matematike treba da bazira na širem matematičkom obrazovanju i vaspitanju nacionalnog duha u matematici. Pisac ovih redaka ukazuje na slične zaključke koji su učinjeni u programima fizike za široku ocenu rada Nikole Tesle.

Da bi šire čitalačke krugove približili o s n o v n i m matematičkim pogledima Petrovića, ovdje ćemo se zadržati na najznačajnijoj grupi Petrovićevih radova — Teoriji matematičkih spektara[1].

Pažljivo proučavanje ove prve grupe naučnih radova baca više svetlosti na ličnost Petrovića kao naučnika koji se »odlikuje raznolikošću novih ideja, brzim prodiranjem disparatnih činjenica što je plod njegove bujne intuicije i ogromne aktivnosti koja se rasprostirala u sve oblasti matematičke analize«.

1. Prvih decenija ovog veka Mih. Petrović je uveo nov pojam u teoriji brojeva koji je danas poznat pod imenom Teorija matematičkih spektara. Za ovo srazmerno kratko vreme Teorija matematičkih spektara je našla mnogobrojne primene i postala skoro neophodna u mnogim granama matematike, naročito u statistici, funkcionalnoj analizi i astronomskim izračunavanjima.

I kada je pre 39 godina (1917 godina smatra se za početak rada na matematičkim spektrima) Mih. Petrović postavio osnovna načela svoje teorije[2], naučni svet Evrope živo se zainteresovao za novu metodu matematičke analize. Sve akademije nauka detaljno su raspravljale o ovoj nesvakidašnjoj originalnosti u stvaranju potpuno nove metode. Ova teorija smatra se za najoriginalnije Petrovićevo delo — ona imponuje. »Njegova teorija brojnih spektara i time stvorena spektralna metoda tako je elastična i tako plodna u primenama« pisao je pariski matematičar Maurice d'Ocagne povodom prve knjige Petrovića Les spectres numériques.

I najzad, 1928 godine Petrović je pozvan da na Sorboni, na Katedri svojih nekadašnjih profesora Poincaré-a, Darboux-a, Picard-a, Hermite-a, Appell-a i dr. održi letnji kurs svoje teorije. Tu je ukazao na osnovne elemente brojnih spektara koji su učinili značajan korak napred i oni prave uvod u novu nauku, spektralnu analizu (aplikacija d-r K. Orlova).

To je bilo veliko priznanje Petroviću i našoj nacionalnoj matematici.

2. Brojni spektri zasnivaju se na jednostavnoj i dobro poznatoj činjenici da se proučavanje neprekidne funkcije

$$y = f(x)$$

u okolini $|h| < \eta$, ili uopšte svake funkcije pri čemu je postupak f određen uslovima koji su izbrojljivi, svodi na proučavanje jednog jedinog decimalnog razlomka. Ili pak, u uvodu svoje teze K. Orlov je pisao: Osnovni zadatak matematičke teorije

---

[1] M. Milanković u predgovoru knjige **Notice sur les travaux scientifiques de Michel Petrovich**, Paris 1922 (izdanje SAN) grupisao je celokupni naučni rad Petrovića u pet velikih grupa, gde na prvo mesto stavlja Teoriju matematičkih spektara.

[2] Interesantno je primetiti da sâm Mih. Petrović nije bio zadovoljan radom na Numeričkim spektrima i Opštom fenomenologijom. Došlo je do njegova razočarenja u oblastima gde je bio najoriginalniji. Petrović je ovo više puta javno izjavio. D. Mitrinović — Biografske zabeleške i uspomene na Mih. Petrovića, Nauka i priroda 8 — VIII, Beograd 1955.

spektarā je izračunavanje nekog konačnog ili beskonačnog niza nepoznatih veličina, ako se ove mogu dovesti u određenu i poznatu zavisnost s nekim nizom celih brojeva tako, da se pomoću njih mogu odrediti i prvobitne nepoznate veličine.

Prema tome, matematički spektar je jedan broj koji se obrazuje od više datih brojeva.

Neka je dat niz brojeva

$$N_1, N_2, N_3 \ldots, N_k.$$

Ako svakom broju N_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ odgovara s_i cifara, tada niz grupe cifara

$$P_1, P_2, P_3 \ldots, P_k$$

sastavljene od odgovarajućih brojeva N_i ispred kojih stoji izvestan broj nula obrazuje brojni spektar:

$$S = P_1 P_2 P_3 \ldots P_k$$

sa spektralnim ritmom h_i. Ritam h_i određen je tako da grupa P_i ima h_i cifara uključujući izvestan broj nula, koji je unapred dat i mora biti u zavisnosti od indeksa i grupa brojeva P_i.

Vredno je i primetiti, da se danas u spektralnom računu govori o spektrima sa uniformnim ritmom h određenim jednakostima:

$$h_1 = h_2 = h_3 = \ldots = h_k = h,$$

pri čemu se za ritam uzima svaki broj koji ima bar onoliko jedinica, koliko najveći broj niza ima cifara.

Naprimer, za niz brojeva

$$4, 12, 9, 17, 47$$

imamo da je spektar sa ritmom $h = 2$

$$S_2 = 412091747$$

ili sa ritmom $h = 3$

$$S_3 = 4012009017047.$$

Znači, od istog niza brojeva može se uvek obrazovati spektar sa većim ritmom, recimo $h = 4$. Tada bi spektar glasio:

$$S_4 = 40012000900170047 \qquad (*)$$

Od niza datih brojeva uvek je moguće sastaviti spektar sa unapred određenim ritmom h. Važi i obrtnuti postupak. Iz datog spektra moguće je doći do spektralnih brojeva, tj. do prvobitnog niza brojeva, ako se spektar razdvoji uspravnim crtama koje se nazivaju prugama spektra. Tako napr. iz spektra (*) podeljenog na pruge sa ritmom $h = 4$ (deoba se vrši s leva udesno)

$$S_4 = 4 \mid 0012 \mid 0009 \mid 0017 \mid 0047$$

dolazi se do prvobitnog niza brojeva:

$$4, 12, 9, 17, 47.$$

3. U ovom odeljku iznesimo praktičnu primenu Teorije matematičkih spektara.

Matematički spektri zainteresovali su veliki broj stranih i domaćih naučnika. Brojna literatura iz ove oblasti pokazuje od kolikog je značaja Petrovićev pionirski rad. Iz bibliografskih podataka o matematičkim spektrima čitalac može saznati da se primenom Teorije matematičkih spektara bavi K. Orlov, današnji docent Beogradskog univerziteta. Rad Orlova je naglašen u tezi, prikazima na kongresima matematičara i naročito u primeni matematičkih spektara na aritmetičke i algebarske probleme koju je sam prvi uveo 1953 pod nazivom Spektralna aritmetika i algebra.

Primer 1. — U mnogim aritmetikama za peti razred osmogodišnjih škola nalazi se zadatak da se izvestan niz brojeva sabere i horizontalno i vertikalno. Pokažimo ovde spektralnu metodu u gornjem postupku za nalaženje zbira.

Odjednom treba sabrati sledeća četiri stupca od po tri broja

3	126	27	37
18	38	95	30
37	9	17	111

Kako je u ovom slučaju ritam $h = 3$, jer indikatorski broj $i = 126 \cdot 4 = 504$ ima tri cifre, to obrazujemo spektre horizontalnih redova:[3]

$$S_1 = 3126027037, \quad S_2 = 18038095030, \quad S_3 = 37009017111$$

Sabiranjem ovih spektara dobija se rezultujući spektar, koji — podeljen na pruge — daje zbirove pojedinih stubaca

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 58 \mid 173 \mid 139 \mid 178$$

Primer 2. — U Državnom osiguravajućem zavodu (DOZ) ili u Narodnim bankama veoma često pojavljuju se slučajevi množenja više brojeva jednim istim brojem

$$a_1 \cdot p, \; a_2 \cdot p, \; a_3 \cdot p, \ldots, \; a_n \cdot p$$

kao potreba da se izračuna isti procenat od više različitih veličina. Neka napr. treba izračunati

$$94 \cdot 36, \; 69 \cdot 36, \; 52 \cdot 36, \; 83 \cdot 36$$

Kako je ovde indikatorski broj $i = 94 \cdot 36 = 3384$, to treba formirati običan spektar množenika sa ritmom $h = 4$

$$S = 94006900520083$$

Ako se spektar S pomnoži brojem 36 dobije se rezultujući spektar

$$3384 \mid 2484 \mid 1872 \mid 2988$$

koji — odvojen na pruge ritmom $h = 4$ — daje rezultat množenja. Svaki od ova četiri četvorocifrena broja daje respektivno po jedan od tražena proizvoda.

Primer 3. — U ovom primeru pokazaćemo kako odjednom množimo više brojeva sa različitim množiocima. Ako je potrebno odjednom pomnožiti brojeve $23 \cdot 37$, $24 \cdot 18$ i $17 \cdot 42$, treba prvo odrediti ritam. Kako je ovde indikatorski broj $i = 42 \cdot 24 \cdot 2 = 2016$ to za ritam imamo $h = 4$. Formirajmo spektre

$$S_1 = 2300240017 \qquad S_2 = 3700180042$$

pri čemu je S_1 spektar množenika, a S_2 spektar množilaca. Njihovim množenjem

$$S_1 \cdot S_2 = 8\,5\,1 \mid 2027 \mid 0\,4\,3\,2 \mid 1314 \mid 0\,7\,1\,4$$

dobija se rezultujući spektar, koji podeljen na pruge daje tražene proizvode. U

---

[3] Praktična spektralna aritmetika nije aksiomatična i ne raspolaže definitivnim stavovima i zakonima koji povezuju osnovne elemente spektralnog računa. Ona je variabilna u primenama i podešava svoju aparaturu prema prirodi zadatka. Tako na pr., za svaki pojedini zadatak postoji posebno pravilo na osnovu koga se određuje dužina ritma.

Pri određivanju ritma na precizan način, za ritam **h** se uzima broj cifara indikatorskog broja **i**. Indikatorski broj je u zavisnosti od prirode i vrste brojeva u jednom zadatku. U gornjem primeru indikatorski broj dobija se kao proizvod najvećeg sabirka i broja stubaca.

K. Orlov je u knjizi »Osnovi praktične spektralne aritmetike i algebre« — Beograd 1955 (str. 31) prikazao u vidu šeme ili pravila tabelu za određivanje ritma preko indikatorskog broja:

— Sabiranje	i = a . n
— Množenje istim brojem	i = a . b
— Množenje različitim množiocima . . .	i = 2 . a . b
— Akumulativno množenje	i = a . b . n
— Distributivno množenje	i = a . b

gde je: a najveći broj prve grupe, b najveći broj druge grupe i n broj sabiraka u zadatku.

Zaključci u tabeli, kao i ostale činjenice su čisto apriorne. Strogi dokazi nalaze se u naučnim radovima o matematičkim spektrima.

ovom slučaju vrede samo pruge na prvom, trećem i zadnjem mestu, a ostale su p a r a z i t n e.

Iz ovog primera može se jasno uočiti korist od spektralne metode. Umesto da za svaki proizvod f i k s i r a m o mašinu, to činimo odjednom za sve proizvode.

Primer 4. — Izračunajmo odjednom izraz

$$45 \cdot 21 + 39 \cdot 23 + 40 \cdot 45.$$

Kako je ovde indikatorski broj $i = 45 \cdot 45 \cdot 3 = 6075$, to u ovom primeru imamo da je $h = 4$. Ako se obrazuje spektar množenika i obrnuti spektar množilaca

$$S_1 = 4500390040 \qquad S_2 = 4500230021$$

tada njihov proizvod

$$S_1 \cdot S_2 = 2025 \mid 2790 \mid 3642 \mid 1739 \mid 0840$$

daje traženo rešenje koje se uvek nalazi u srednjoj pruzi rezultujućeg spektra.

Primer 5. — Na kraju pokažimo jedan opšti primer brojnog izraza gde će se spektralnom metodom uprostiti i ubrzati račun na nalaženju brojne vrednosti agregata. Neka je dat brojni izraz

$$\sigma = \frac{62 \cdot 32 + 48 \cdot 23 + 57 \cdot 46}{62 + 48 + 57}$$

čiju vrednost treba izračunati. — Kao što se vidi u brojnom izrazu imamo slučaj akumulativnog množenja pri čemu je indikatorski broj $i = 62 \cdot 46 \cdot 3 = 8556$, što daje ritam $h = 4$. Zatim, treba obrazovati običan spektar svih množenika $S_1 = 6200480057$, ubaciti ga u računsku mašinu i pomnožiti ga sa obrtnutim spektrom množilaca $S_2 = 4600230032$. Rezultujući spektar

$$S_1 \cdot S_2 = 2852 \mid 3634 \mid 5710 \mid 2847 \mid 1824$$

daje vrednost akumulativnog množenja:

$$62 \cdot 32 + 48 \cdot 23 + 57 \cdot 46 = 5710.$$

Kako je imenilac sastavljen od istih brojeva množenika u brojiocu, to nije potrebno »anulirati« mašinu, već poziciju na pultu mašine treba iskoristiti za nalaženje vrednosti imenioca. To postižemo na taj način što naznačeno sabiranje $62 + 48 + 57$ vršimo pomoću množenja. Naime, već postojeći spektar S_1 treba pomnožiti jediničnim spektrom od tri jedinice sa $h = 4$. Kako je

$$S_1 \cdot 100010001 = 62 \mid 0110 \mid 0167 \mid 0105 \mid 0057$$

to je $62 + 48 + 57 = 167$.

Iz dobivenih zaključaka sledi krajni rezultat

$$\sigma = 5710/167$$

Prikazani primeri su dovoljni da se shvati osnovna nit primene matematičkih spektara na aritmetičke koncepcije.

Napomenimo i sledeće: Osnovno načelo u primeni matematičkih spektara jeste u b r z a v a n j e rada na računskim mašinama. Zadatak je bio uperen ka cilju olakšavanja svim kalkulatorima pri raznim izračunavanjima.

Primenom elektronike pošlo je čoveku za rukom da stvori mašine velikih razmera za basnoslovno brzo brojanje i računanje. I kada je pre toliko mnogo decenija 19-godišnji Pascal prvi pronašao računsku mašinu na sistemu kolena i koturova, nije se ni slutilo da će zadnje decenije ovoga veka dati takvu elektronsku spravu koja može da reši istovremeno 150 raznih jednačina, koje bi inače iziskivale četiri miliona zasebnih računskih operacija (Univerzitet u Kaliforniji). I u takvom spektaklu pojava sve savremenijih mašina za računanje, Teorija matematičkih

spektara otkriva novu metodu u radu i sistemima matematičkih strojeva. Praktično: treba povećati kapacitet pulta mašine (u primerima rezultujući spektar može da sadrži i preko 40 cifara) ili ekrana multipliera.

Pak, s druge strane, ako je moguće na »elektronskim mozgovima« rešiti za nepune tri minute sistem linearnih jednačina sa 90 nepoznatih (mašina SEAC u Vašingtonu), tada spektralni metod za ubrzavanje rada na mašinama je ništavan. Ipak, aplikacija, koju je K. Orlov ustrojio 1953 g., mogla bi se primeniti po onim kalkulatorima čiji se rad zasniva na računskim mašinama starijeg tipa.

Nešto o računanju s približnim vrednostima

ПЛАТОН ДИМИЋ, Скопје

Često se događa da, umesto da računamo s pravim (tačnim) vrednostima brojeva, moramo upotrebiti pri računanju njihove približne vrednosti. Tako, na primer, ako smo one brojeve, s kojima treba da računamo, dobili putem merenja, možemo biti gotovo sigurni, da su oni samo donekle tačni. Isto tako, ako pri računanju treba da upotrebimo i iracionalne brojeve (kao što su $\sqrt{2}$, π, najveći deo vrednosti trigonometriskih funkcija, najveći deo logaritma i sl.), jasno je da pri vršenju izračunavanja krajnjeg rezultata možemo uzeti u obzir samo konačan broj njihovih decimala i da stoga stvarno nećemo računati sa samim tim brojevima, nego sa njihovim približnim vrednostima. Međutim, nije teško uvideti da usled toga ni rezultat, koji se dobije pri ovakvim izračunavanjima, neće biti tačan, nego će biti samo približan onom, koji bi se dobio, kad bi se računalo sa tačnim vrednostima. Stoga je prvo pitanje koje se u vezi sa dobijanjem ovakvih rezultata može postaviti, sledeće: šta može da se uradi sa ovakvim rezultatima, Da li se oni mogu ipak nekako koristiti i za dalja izračunavanja, odnosno za praktičnu primenu, ili ne?

Međutim, u vezi sa ovim pitanjem nije teško uočiti odmah sledeće: da, ako o grešakama, koje postoje u datim podacima, baš ništa ne znamo, onda nećemo moći reći ništa ni o veličini greške u nađenom rezultatu, tako da u tom slučaju taj rezultat nećemo moći uvstari ni za šta koristiti. Ali stvar je u tome što mi vrlo često o mogućim ili postojećim grešakama u datim podacima znamo ipak ponešto, i to, ako ništa drugo, a ono bar kolико najviše može iznositi ta greška, ili, kako se to kaže u matematici, kolико iznosi gornja granica apsolutne vrednosti te greške. Tako, na primer, ako neku duž, nacrtanu na hartiji, izmerimo pomoću milimetarske skale, utisnute u ivicu lењira, mi onda, istina, ne možemo znati za kolико smo pri tome tačno pogrešili, ali možemo ipak smatrati da učinjena greška ne iznosi više od, recimo, jednog milimetra, jer bismo svaku veću grešku svakako opazili; ili, ako smo umesto prave vrednosti broja π upotrebili broj 3,14, onda možemo čak pouzdano tvrditi da učinjena greška nije veća od 0,002, jer znamo da je $\pi = 3{,}1415\ldots$ A kada to znamo, onda možemo izračunati i kolико iznosi gornja granica mogуće greške u rezultatu računanja, izvedenog na osnovu ovakvih, nedovoljno tačnih podataka, što je često već vrlo много: jer, ako se pokaže da je ova greška mala, ili bar manja od t. zv. dopustive greške u pojedinim izračunavanjima, onda ćemo nađeni rezultat, bar u vezi sa mnogim tehničkim konstrukcijama, moći smatrati za tačan; a ako se pokaže da nije tako, onda ćemo morati predузeti nova merenja, doći eventualno do tačnijih podataka, pa onda ponoviti svoja izračunavanja, da bismo došli do tačnijih rezultata.

Стога у математици постоји читав посебан одељак ове науке, који се бави рачунањем с приближним вредностима, и који има своје развијене методе рада. Тај је одељак на свој начин занимљив, али се ми овде нећемо задржавати на његовом приказивању, него ћемо се зауставити само на следећем: показаћемо, на примерима, како се у неким простијим случајевима може и без икакве посебне спреме одређивати горња граница грешке у нађеном резултату, тако да је може израчунати и сваки наш гимназист.

Претпоставимо, дакле, да смо, користећи се једним теразијама и теговима не мањим од 1 грама, измерили 6 различитих комада неког метала, и да смо при том добили следеће тежине: 46 *gr*, 38 *gr*, 16 *gr*, 45 *gr*, 24 *gr* и 35 *gr*. С обзиром на то укупна тежина измереног метала би била: $t = 46 + 38 + 16 + 45 + 24 + 35 = 204$ *gr*. Међутим, чак и ако претпоставимо да су нам теразије биле сасвим прецизне и да смо сва мерења извршили најпажљивије, јасно је да их нисмо могли извршити сасвим тачно, због недостатка у теговима, ситнијим од 1 грама. Стога се може поставити питање: колико можемо погрешити, ако 204 *gr* узмемо за тачну вредност целокупног измереног метала?

На ово питање није тешко одговорити. Наиме, ако се узме у обзир да смо се при мерењу појединих комада овог метала зауставили увек на оном броју грамова, при коме су теразије најмање отступале од свог равнотежног положаја, јасно је да смо при сваком оваквом мерењу могли погрешити највише за 0,5 *gr*., или да смо укупно, при свим мерењима, могли погрешити свега за $0{,}5.6 = 3$ *gr* у једном или у другом смислу, што значи да стварна тежина свих 6 измерених комада може износити од 201 до 207 грама. Притом нема много вероватноће да смо при свим мерењима грешили увек у истом смислу; али се и то могло догодити, па зато морамо узети као границе укупне тежине 201 *gr* и 207 *gr*, а као горњу границу могуће грешке треба узети $\varepsilon = 3$ *gr*, ако узмемо да је $t = 204$ *gr*.

Или, да узмемо један други пример. Претпоставимо, наиме, да хоћедо да одредимо пречник једне округле гвоздене собне пећи, који не можемо непосредно да измеримо, и да смо ради тога измерили обим пећи помоћу једног обичног кројачког »сантиметра« и нашли, на пример, да тај обим износи 130 *cm*. Ако после тога искористимо образац $2r = \frac{O}{\pi}$, и уместо π употребимо његову приближну вредност 3,14, добићемо:

$$\begin{array}{r} \underline{13000} : 314 = 41{,}40\ldots \\ \underline{440} \\ \underline{1260} \\ \underline{40} \\ \ldots\ldots \end{array}$$

што значи да дужина пречника ове пећи, заокругљена на десете делове једног сантиметра, износи $2r = 41,4$ *cm*.

Међутим, јасно је да ми, служећи се кројачким »сантиметром«, нисмо морали добити величину обима, па претпоставимо да смо после вишеструког мерења дошли до закључка да је учињена грешка могла износити 0,5 *cm* у позитивном или у негативном смислу. Даље је, исто тако, јасно и то, да смо ми при рачунању уместо праве вредности броја π употребили његову приближну вредност 3,14. Стога и у овом случају треба одредити горњу границу величине могуће грешке у резултату.

Ради тога поступићемо на следећи начин. Ако се посматра образац $2r = \frac{O}{\pi}$, види се да се за $2r$ добила свакако нешто мање од његове праве вредности ако се за O узме што мања од његових могућих вредности, а π замени неком својом при-

ближно већом вредношћу, док ће се за $2r$ добити свакако нешто више од његове праве вредности ако се за O узме највећа од његових могућих вредности, а уместо π употреби некаква његова приближно мања вредност. Стога ћемо извршити следећа два дељења:

$$\begin{array}{r|l} 12950 & 315 = 41{,}11\ldots \\ \hline 350 & \\ \hline 350 & \\ \hline 350 & \\ \hline 35 & \\ \ldots\ldots & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13050 & 314 = 41{,}56\ldots \\ \hline 490 & \\ \hline 1760 & \\ \hline 1900 & \\ \hline 16 & \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Одатле се пак види да се стварна вредност пречника у овом случају налази негде између $2r_1 = 41{,}1\ cm$, и $2r_2 = 41{,}6\ cm$, што значи да у случају, ако узмемо да је $2r = 41{,}4\ cm$, можемо да погрешимо за не више од $0{,}3\ cm$ у позитивном, односно за не више од $0{,}2\ cm$ у негативном смислу.

(Приметимо, међутим, да ми наведене границе можемо у овом случају донекле да сузимо, чак и ако не располажемо никаквим средством за мерење, тачнијим него што је кројачки »сантиметар«, зато што за π можемо да употребимо и извесне тачније вредности него што су 3,14 и 3,15. И, заиста, ако уместо π употребимо његову прву приближно мању вредност са три децимала, тј. број 3,141, односно његову прву приближно већу вредност са 3 децимала, тј. број 3,142, добијамо:

$$\begin{array}{r|l} 129500 & 3142 = 41{,}21\ldots \\ \hline 3820 & \\ \hline 6780 & \\ \hline 4960 & \\ \hline 1818 & \\ \ldots\ldots & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 130500 & 3141 = 41{,}54\ldots \\ \hline 4860 & \\ \hline 17190 & \\ \hline 14850 & \\ \hline 2286 & \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Одатле се пак види да сад већ можемо тврдити да се права вредност пречника налази негде између 41,2 cm и 41,6 cm, што значи да горња граница апсолутне вредности могуће грешке није већа од $0{,}2\ cm$, ако се као величина пречника узме $2r = 41{,}4\ cm$.)

Најзад, да узмемо још један пример. Претпоставимо да треба да израчунамо вредност $x = \sqrt{3}\ tg\ 32^{0}10'$ и да смо вредности за $\sqrt{3}$ и $tg\ 32^{0}10'$ узели из неких четвородецималних таблица, заокругљене на 4 децимала. Тада можемо извршити множење:

$$\begin{array}{r} 1{,}7321 \cdot 0{,}6289 \\ \hline 155889 \\ 138568 \\ 34642 \\ 103926 \\ \hline 1{,}08931769 \end{array}$$

Одатле добијамо да је $x = 1{,}08931769$.

Међутим, како су вредности $\sqrt{3}$ и $tg\ 32^{0}10'$ биле заокругљене на по 4 децимала, јасно је да је свака од њих могла носити у себи грешку од 0,00005 у позитивном или у негативном смислу, па стога, ако бисмо хтели да утврдимо границе, међу којима се налази права вредност x-а, требало би да израчунамо вредности $x_1 = 1{,}73215 \times 0{,}62895$ и $x_2 = 1{,}73205 \times 0{,}62885$.

Но, у овом случају, ради скраћења поступка, ове границе можемо израчунати још и овако:

$$x_{1,2} = (1{,}7321 \pm 0{,}00005)\ (0{,}6289 \pm 0{,}00005) = 1{,}7321 \times 0{,}6289 \pm (1{,}7321 + 0{,}6289) \times 0{,}00005 + 0{,}0000000025 = 1{,}0893176925 \pm 0{,}000118050$$

$$x_1 = 1{,}0894357425 \qquad x_2 = 1{,}0891996425$$

Одатле се пак види следеће:

а) Да у нађеном резултату не треба задржати ни у ком случају више од 4 децимала, јер већ ни цифра на месту четвртог децимала није сигурна; а ако сматрамо да је $x = 1{,}0893$, онда морамо рачунати с тим да ова вредност може имати у себи грешку, која по својој апсолутној вредности није већа од 0,0002.

б) Да је уствари један део изведеног множења био сувишан, јер последње 4 цифре нађеног резултата нису биле уопште узете у обзир, и да се оно, с обзиром на ту околност, могло можда некако и скратити.*

в) Да бисмо у случају ако бисмо се ограничили само на прва три децимала нађеног резултата, могли тврдити да су све задржане цифре тачне и да је ова вредност свакако мања од праве, с тим што би се сад као горња граница апсолутне вредности учињене грешке морало узети 0,0005.

А сада да видимо, шта је било заједничко у поступцима које смо применили у ова три примера. Заједничко је било, наиме, то, да смо с обзиром на грешку која је могла постојати у употребљеним подацима, најпре израчунали извесну вредност која је свакако мања од тачне вредности траженог резултата, па смо онда израчунали извесну вредност која је била свакако већа од тачне вредности траженог резултата. На основу те две вредности могло се утврдити затим за колико је нађена вредност могла највише да отступи од тачне вредности резултата, и то је било најважније. Јер ако је после тога требало нађени резултат употребити у неку практичну сврху, ми смо већ знали колику максималну грешку може тај резултат да носи у себи, па смо, према природи самог проблема, могли да се определимо да ли ћемо га употребити или не.

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Такмичење ученика сред. школа НР Македоније из физике

Као што је крајем 1954/55 шк. године Друштво математичара и физичара НР Македоније организовало такмичење из области математике за ученике средњих школа, тако је крајем протекле 1955/56 шк. године од стране овог друштва било организовано и једно средњошколско такмичење из области физике. Сем тога одлучено је да се ова такмичења одржавају и у будуће, и то на смену, једне године из области математике, а друге године из области физике.

Ово последње такмичење је одржано 3 јуна о. г. и у њему је учествовало укупно 9 ученика из 5 од свега 17 гимназија из НР Македоније. Такмичење је било индивидуално и састојало се у томе што је требало да учесници за одређено време одговоре писмено на једно теориско питање, да реше један нумерички задатак, и да изведу по једну групу експеримената. Притом су најбољи успех показали, па су и награђени, следећи ученици:

Томо Бошевски, уч. VIII разр. гимн. »Јосип Броз Тито« из Битоља, првом наградом;

* Стварно постоји начин скраћеног множења за овакве случајеве, само га ми овде не можемо износити.

Милан Грдановски, уч. VII разр. гимн. »Мирче Ацев« из Прилепа, првом наградом;

Петар Стојановски, уч. VIII разр. гимн. »Јосип Броз Тито« из Битоља, другом наградом; и

Петар Николовски, уч. VII разр. гимн. »Гоце Делчев« из Куманова, трећом наградом.

Овим ученицима предате су дипломе и наградни предмети.

Текст задатка био је следећи.

За VI клас

1. Трите Њутнови закони на механиката.

2. Тело што паѓа слободно во безвоздушен простор ги премина последните 15 метри од својот пат за 0,4 сек. Од која висина почнало телото да паѓа?

3. Архимедов закон (експерименти).

За VII клас

1. Спектри.

2. Во една просторија со големина $3\times4\times3\ m^3$ владее температура од 20°C. Во оваа просторија е измерена релативна влажност од 70%. Колку к'е изнесува релативна влажност, ако во оваа просторија се испари уште $100gr$ вода? (При температура од 20°C боздухот може да прими најмногу $17{,}3\ gr/m^3$ водена пара.)

3. Ликови при лек'ите (експерименти).

За VIII клас

1. Фарадејеви закони за електролизата.

2. На една сијалица се наведени следните податоци: 60W, 70,4Ω. На која температура к'е се загреје жичката на сијалицата при полна светлина, ако термичкиот коефициент на волврамот е 806,7Ω?

3. Електромагнетна индукција (експерименти).

Примећујемо да су ученици Томо Бошевски и Петар Стојановски били награђени ове године и од стране Математичко-физичког листа за решење задатака из математике и физике.

Évariste Galois matematičar, borac i revolucionar

Évariste Galois bio je jedan od najdubljih matematičkih genija, koji su ikad postojali. Rodio se 1811. u Bourg-La-Reine-u kraj Pariza. Roditelji su mu bili pristaše revolucionarnih ideja, što ih je širila francuska revolucija. God. 1823. pošao je u glasovitu francusku gimnaziju Louis-le-Grand. Učenike te škole karakterizirala je ljubav prema učenju, prema nauci, njegovanje uspomena na revoluciju, širenje liberalnih ideja kao i mržnja i prezir za razne pokušaje francuske reakcije. Kad su se na pr. učenici za vrijeme školovanja mladog Galois za jedne svečanosti izrugivali zdravici kralju, veliki je broj učenika bio isključen iz škole.

God. 1829. pronađe Galois u biblioteci škole udžbenik geometrije od Legendre-a. Tu je knjigu čitao požudno kao kakav roman. Čitav se niz teorema tako usjekao u njegovu dušu, da ih je mogao recitirati kao kakovu priču.

Pretražujući dalje biblioteku svog zavoda, pronađe djelo Lagrange-a o rješavanju numeričkih jednadžbi kao i neka druga djela iz područja više matematike. Sva je ta djela on temeljito proučavao. Doskora stekne prigodom jednog natječaja nagradu, te već ulazi u najteža područja matematike uz opće divljenje svojih sudrugova i profesora, koji su već osjećali, da ih je premašio.

Još kao đak škole Louis-le-Grand napisao je raspravu o periodskim verižnim razlomcima, koja je izašla u matem. listu onog doba »Annales de Gergonne« (1829).

God. 1830. upiše se u visoku školu École normale; ona je spremala svoje učenike za nastavnike matematike. Iste i slijedeće godine napisao je 6 rasprava o raznim pitanjima iz matematike ponajviše o algebarskom rješavanju jednadžbi.*

* Kaže se, da se neka jednadžba rješava algebarski, ako se može vrijednost svakog njezinog korijena predočiti izrazom, u kojemu dolaze koeficijenti jednadžbe kao i znaci 4 osnovnih operacija i vađenje korijena; broj tih znakova mora biti konačan. Ako to nije moguće, jednadžba se ne može riješiti algebarski.

Poznato je, da se jednadžba drugog stepena $x^2 + px + q = 0$ dade riješiti s pomoću korijena; također jednadžbu trećeg stepena $x^3 + px + q = 0$, te je jedan korijen te jednadžbe

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

I jednadžbe 4. stepena dadu se slično riješiti s pomoću korijena.

Nastaje pitanje, da li se jednadžba n-tog stepena

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

dade također riješiti s pomoću korijena.

Norveški matematičar Abel pokazao je god. 1824., da je nemoguće riješiti pomoću korijena općenitu jednadžbu petog stepena ili stepena višeg od petog.

Međutim, lako uviđamo, da ima beskonačno mnogo posebnih jednadžbi svih stepena, koje se zbog svog oblika i zbog svojih svojstava dadu algebarski riješiti.

Tako se došlo, kako je već to spomenuo Abel, na 2 problema, koja su tijesno vezana jedan uz drugi i kojih potpuno rješenje obuhvaća svu teoriju algebarskih jednadžbi:

1) *Treba moći naći sve jednadžbe bilo kojeg stepena, koje se algebarski dadu riješiti.*

2) *Treba moći odlučiti, da li se neka zadana jednadžba može ili ne može algebarski riješiti.*

Galois je sva ta pitanja snažno načeo i upirući se u istraživanja Lagrange-a i Abela pronašao način, kojim se može raspoznati, da li se neka jednadžba stepena po volji može ili ne može algebarski riješiti. Galois-ova besmrtna radnja nosi naslov »O uvjetima rješivosti jednadžbi s pomoću korijena«. Ona je izašla tek 1846*; Galois-ovu je teoriju razvio i usavršio francuski matematičar Camille Jordan.

Tako je problem o rješivosti algebarskih jednadžbi, koji je bio briga matematičara gotovo 300 godina, zaslugom Galois-ovom bio definitivno riješen.

Osvrnimo se još malo na politički rad mladog Galois-a. Kako smo spomenuli, već u liceju Louis-le-Grand odgajao se i napajao slobodarskim idejama.

Za vrijeme, dok je učio u školi École normale, došli su uzbudljivi dani srpanjske revolucije, koji se u francuskoj povijesti zovu »Les trois glorieuses« (Tri slavna dana). Kralj Karlo X. morao je abdicirati, a na vlast dođe novi kralj Ljudevit Filip, koji je, kako su republikanci isticali, uspio narodu ukrasti njegovu revoluciju.

Dok su trajale borbe (27—29. srpnja 1830.), direktor škole École normale držao je sve učenike u ograđenom prostoru strogo pod ključem, pa dok su se đaci Politehničke škole borili na barikadama i ginuli, Galois i njegovi drugovi morali su ostati pasivni motrioci revolucije. Oni su doduše na nagovor Galois-a htjeli silom provaliti vrata, ali su u zadnji čas zaustavljeni.

Galois je zbog toga napisao direktoru škole vrlo oštro pismo, koje je i izašlo u listu »Gazette des Écoles« i u kojem žestoko protestira protiv gušenja revolucionarnih misli i djela. Zato je bio kažnjen i doskora izbačen iz škole.

Mjesec dana poslije ovog isključenja otvori Galois u jednoj zgradi pokraj Sorbonne-e školu za višu algebru. U toj školi, kaže on, moći će se slušaoci uvjeriti o nedostacima službenih predavanja o tom predmetu i steći znanja, koja im nedostaju. Ta škola je nažalost bila kratka vijeka.

U to doba Galois pripada sasvim krugovima, koji se bore protiv Ljudevita Filipa i sudjeluje kod svih pobuna. Upisao se u Narodnu gardu i kad je garda bila raspuštena, nosi dalje njenu uniformu. Bio je duboko ojađen zbog prilika, koje su vladale i reče jednom, kad

---

* Jednostavni prikaz Galois-ove teorije algebarskih jednadžbi nalazimo u djelu **V. Verriest, Évariste Galois et la théorie des équations algébriques. Paris, Gauthier Villars.**

bi bilo potrebno neko mrtvo tijelo, da se narod pobuni, on bi odmah žrtvovao svoje.

Kod jednog banketa, što ga je organizirala republikanska stranka, nazdravljalo se revoluciji 1793., montanjarima, Robespierre-u, a izrugivala se revolucija od 1789. i 1830. Kad su duhovi već bili dosta uzbuđeni, Galois ustane na jednom kraju stola i držeći u istoj ruci svoju čašu i svoj otvoreni nož reče naprosto »Za Ljudevita Filipa«.

To je bilo prvi put, da je misao atentata na kralja bila jasno rečena.

Galois bude uhapšen i odveden u istražni zatvor, gdje je proboravio više od mjesec dana. Njegovo držanje na sudu bilo je agresivno i ironičko. Ipak ga je porota s obzirom na njegovu mladost ovaj puta riješila.

Karakteristično je, da je Alexandre Dumas, veliki francuski pisac, koji je također bio prisutan kod te svečanosti, kad je čuo, što je Galois rekao, skočio kroz prozor u vrt, samo da se eventualno ne izloži neugodnostima.

Galois ostade na slobodi samo mjesec dana. Na dan 14. srpnja 1831. republikanska je stranka spremala veliku manifestaciju, ali prefekt policije proglasi je buntovnom i naredi preventivno hapšenje Galois-a kao »najbjesomučnijeg neprijatelja kralja«. Kod hapšenja na jednom mostu našli su kod njega osim njegove nabijene karabinke pištolj i bodež.

Zbog ilegalnog nošenja uniforme bio je poslije 2 mjeseca preventivnog zatvora suđen sa 6 mjeseci strogog zatvora. Ovaj je put tamnica bila strašna. U tamnici je ipak svoje drugove mogao odgajati u revolucionarnom duhu.

Kad je napokon došao na slobodu, upao je brzo u neku spletku, koja se po shvaćanju onog doba nije mogla drukčije riješiti nego dvobojem. Ipak je neshvatljivo, da se Galois, koji je bio silno snažan duh i već kao mladić od 20 godina došao do otkrića ogromne važnosti, upustio u to, da zbog neke stvari vrlo neznatnog i gotovo bezvrijednog značenja stavi svoj dragocjeni život na kocku. Dvoboj se zbio 30. V. 1832; dobivena rana bila je smrtonosna i Galois umre slijedeći dan. Kako je bio zakopan u skupni grob, nema danas nikakovog traga pogreba É. Galois-a.

Eto, takav bijaše život É. Galois-a, zaista kratak i osebujan. Njegova je smrt značila ne samo ogromni gubitak za matematičku nauku, kojoj bi sigurno, da je živio, davao nove smjerove istraživanja, već i za razvitak demokratskih ideja u njegovu narodu.

S. Š.

Bilijun elektronvolta?

Nedavno je prof. Lawrence, slavni izumitelj ciklotrona,* istaknuo veliku važnost otkrića proizvodnje *jakih* snopova elementarnih čestica velikih energija. Dosad se naime, pri svakom povećanju energije čestica u akceleratorima, smanjila u istoj mjeri jakost struje čestica. Na primjer, godine 1940., uz pomoć ciklotrona, dobivene su čestice, kojih je struja bila jaka veličine miliampera; godine 1943., uz pomoć sinhrociklotrona, koji je davao čestice veće energije dobivena jakost struje čestica imala je samo veličinu mikroampera (milijuntina ampera) a u najnovije vrijeme, uz pomoć bevatrona u Berkeleyju (USA), koji daje česticama snage do 6 milijardi *e V*, dobivena jakost struje česticâ bila je samo veličine milimikroampera (milijardinke ampera). Lako se izračunalo, da bi u slučaju, ako bi se i dalje u istoj mjeri smanjivala jakost struje čestica s povećanjem njihove energije, a akcelerator mogao ubrzati česticu na energiju od 10 bilijuna *e V*, akcelerator protonâ davao svega struju od dva protona na sat.

Jedna od najvažnijih posljedica dobivanja jakih struja čestica pri velikim energijama jest mogućnost da se proizvode sudari česticâ, koje proizlaze iz dvije suprotne struje dva jednaka akce-

* O ciklotronu i ostalim atomskim akceleratorima vidi članak **D. Mayer, Atomski akceleratori,** Mat.-fiz. list, god. III., br. 3.

leratora (ili čak jednog akceleratora). Dosad je taj postupak bio praktično bez značenja, jer kraj izvanredno male jakosti struje čestice, bio je broj sudara praktično beskonačno malen, nezamjetljiv. Omogućivanjem proizvodnje jakih struja čestica broj sudara bit će toliki, da će se rezultati sudara moći opažati. A čemu će to poslužiti? Za izvanredno povećanje energije sudara čestica. Na primjer, čestice, koje nalete jedna na drugu sa suprotnih strana, a svaka s energijom od 10 milijardi *e V*, imat će isti učinak, kao da je jedna čestica naletila na mirni cilj s energijom od 250 milijardi *e V* (to nije elastičan mehanički sudar, nego su tu okolnosti složenije, pa tek poseban račun daje taj rezultat). Ako bismo imali akceleratore svaki od 22 milijarde *e V* bio bi pri srazu dviju čestica isti učinak kao da je jedna čestica, koja udara o mirni cilj, imala bilijun *e V*. Odatle se razabira veliko značenje proizvodnje vrlo intenzivnih struja ubrzanih elementarnih čestica u području najvećih energija: njome je, uz ostalo, omogućeno ispitivanje pojava, koje se događaju pri desetke puta većim energijama, nego što ih akceleratori neposredno daju česticama. Pa ako se sjetimo koliko je skupocjeno svako povećanje energija čestica, što se postizava gradnjom sve većih i snažnijih akceleratora — gradnja bevatrona u Berkeleyju stajala je toliko, koliki je godišnji kredit za cjelokupna naučna istraživanja u Francuskoj! — tad ćemo već u sâmom tom području vidjeti opravdanost Lawrenceovog isticanja velike važnosti, što ga za nauku ima mogućnost proizvodnje snažnih struja čestica velike energije. Kao jedno od najvećih dosadašnjih otkrića bevatrona od 6 milijadi *e V* smatra se otkriće antiprotona (o tom otkriću vidi Mat. fiz. list god. VI. br. 3. str. 110.). Očekuje se ubrzo i otkriće antineutrona, čestice simetrične neutronu, koja će imati suprotno orijentiran magnetski moment od onog što ga ima neutron. A kakva li će tek iznenađenja i mogućnosti pružati dostignuće bilijuna *e V*!

A. K.

Mezoni i hiperoni

Kao što fotoni prenose energiju električnih polja (atoma), tako posebni nosioci, sićušne čestice zvane mezoni, prenose energiju polja nuklearnih sila, tih skrivenih i tek vrlo malo poznatih sila unutar atomskih jezgri. Ti mezoni, njihovo potpuno ime je π-mezoni (pi-mezoni), imaju masu (mirovanja) 273 puta veću od one elektrona, a mogu biti pozitivno ili negativno nabijeni, ili neutralni (bez naboja); veličina njihova naboja jednaka je naboju elektrona (negativnog ili pozitivnog). Pojavljuju se u kozmičkim zrakama[1]), ali se danas mogu i umjetno (vještački) proizvesti u velikim atomskim akceleratorima. Otkriveni su god. 1947., ali je još god. 1935. japanski fizičar Yukawa prorekao njihovo postojanje. Kratkog su vijeka: nabijeni π-mezon živi svega dvije i po stomilijunke ($2{,}5 \cdot 10^{-8}$) sekunde. Naime, nakon što je stvoren u atomskoj jezgri i iz nje izbačen, π-mezon juri prostorom golemom brzinom prosječno samo $2{,}5.10^{-8}$ sek, da bi se tad raspao u dvije druge čestice: u t. zv. μ-mezon (mi-mezon) i sićušnu neutralnu česticu neutrino; tek neznatno mali broj π-mezona, koji prodru u atomske jezgre okolnih atoma, nestaje u njima. (μ-mezon je čestica mase 207 puta veće od one elektrona, otkrivena već ranije, a jednakog naboja kao i elektron i dalje se raspada u elektron i dva neutrina, dok je neutrino sićušna čestica bez naboja, koju dosad nije uspjelo direktno zamijetiti.) Neutralni π-mezon raspada se prosječno još 10 milijuna puta brže od nabijenog π-mezona, dakle »živi« svega oko 2.10^{-15} sek, da bi se tad raspao u dva gama-fotona. (Po Einsteinovoj formuli imaju ta dva fotona zajedno energiju *E*, koja je jednaka mc^2, t. j. masi mezona *m* pomnoženoj s kvadratom brzine svjetlosti.)

π-mezoni su od velike važnosti zbog toga, što nam mogu otkriti podatke o još

[1] O kozmičkim zrakama vidi članak **Kozmičke zrake**, Mat.-fiz. list, god. III., br. 1., a o akceleratorima **Atomski akceleratori**, Mat.-fiz. list, god. III., br. 3.

nepoznatim silama i pojavama unutar jezgre između nukleonâ. Dosadašnja ispitivanja o međusobnom djelovanju π-mezona i atomskih jezgara, što se promatra i u Wilsonovoj komorici, ali još više u emulzijama fotografskih ploča[2]), nisu još dala definitivnih rezultata o silama, koje vladaju unutar atomskih jezgara, a o kojima još tako malo znamo. Sve što se dosad saznalo je potvrda pretkazivanja teoretičara da između dva nukleona (tako se zajedničkim imenom zovu proton i neutron) unutar jezgre postoji na vrlo maloj udaljenosti, do svega $0{,}5.10^{-13}$ cm jaka odbojna sila. Izvan tog sićušnog prostora prevladava izvanredno jaka privlačna sila između nukleonâ.

Osim π i μ-mezona, koje zovemo jednim imenom laki mezoni, otkrivene su otprilike u isto vrijeme još dvije grupe elementarnih čestica: teški mezoni i hiperoni. Teški mezoni imaju masu (mirovanja) oko 1000 puta veću od one elektrona. Postoje pozitivno nabijeni, negativno nabijeni, a i neutralni teški mezoni; ima ih čak više vrsti; ukoliko su električno nabijeni, naboj im je jednak naboju elektrona odnosno pozitrona. I teški mezoni su svi od reda nestalne čestice; raspadaju se nakon 10^{-8} sek (nabijeni), odnosno 10^{-10} sek (neutralni). Hiperoni su pak čestice, kojih masa prelazi veličinu mase protona ili neutrona. Zasad se misli, da su to čestice, koje su složene od jednog nukleona i lakog mezona, ili su još složenije građe. I njih ima više vrsti. Također su nestabilne i raspadaju se prosječno u vremenu od 10^{-10} sekunde. Na primjer, neutralni se hiperon raspada u proton i π-mezon, ali su mogući i drugi načini raspadanja. I teški mezoni i hiperoni nalaze se u kozmičkim zrakama, a teški mezoni mogu se u najnovije vrijeme proizvesti i umjetnim putem uz pomoć najsnažnijeg akceleratora bevatrona u Berkeleyju. Međusobno djelovanje svih tih čestica s atomskim jezgrama promatra se najčešće i najuspješnije u fotografskim emulzijama, ali i u Wilsonovoj komorici. Značenje tih čestica je veliko, jer su oni glasnici zbivanja u atomskim jezgrama, u području, koje nam još skriva svoje najskrovitije tajne.

Vidimo, kako se posljednjih godina znatno povećao broj t. zv. elementarnih čestica materije. U prva tri decenija ovog stoljeća, sve do 1930., bili su poznati samo elektron i proton; zatim su god. 1932. otkriveni neutron i pozitron, pa konačno čitave grupe mezona i hiperona, a da i ne govorimo o nedavno otkrivenom antiprotonu, pa o antineutronu, kojeg se otkriće uskoro očekuje. Dakako s tim u vezi postaju sve složeniji i problemi atomske jezgre.

A. K.

[2] v. **Fotografija u nuklearnoj fizici**, Mat.-fiz. list, god. VI., br. 3., str. 93.

Задатак за наше најмлађе

Једног лепог сунчаног дана пролазио је Марко поред својих другова.

— Здраво сто људи! — обрати се Марко.

На његов поздрав одговори му један из групе:

— Нема нас сто људи. Нас је оволико: да нас је још толико, и још једна половина, и још једна четвртина, и ти, било би нас сто!

На тај одговор Марко се замисли, насмеши и продужи пут. Ишао је тако читавих пола сата размишљајући о одговору својих другова. Хтео је да преко одговора сазна колико их је стварно било. После разних комбинација закључи да их је морало бити 36.

Сав срећан, што је решио тако загонетан одговор својих другова, вратио се кући. Резултат од 36 хтео је и теориском страном преко једначине да провери. И тако је на основу одговора саставио овакву једначину:

$$x + 2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100.$$

Када је једначину решио добио је резултат $26\frac{2}{5}$. Одмах је увидео да је резултат нетачан, јер се човек не може да дели на пет делова.

Где је Марко погрешио у састављању једначине и како треба да се она постави?

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

216.** Дата су два концентрична круга са центром O и полупречницима R и $2R$. Дирка повучена у произвољној тачки M унутрашњег круга сече спољашњи круг у тачкама A и B.

а) Израчунати дужину тетиве AB, као и површину P_1 отсечка спољашњег круга, ограниченог тетивом AB.

б) Из A повучена је друга дирка AN унутрашњег круга, где је N додирна тачка. Означимо са P_2 површину ограничену дирkама AM и AN и (мањим) луком $\overset{\frown}{MN}$ унутрашњег круга. Израчунати P_2.

в) Показати да је $P_1 + P_2 = P$, где је P површина унутрашњег круга.

217. Дата је квадратна једначина

$$f(x) = x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

чији су корени x_1 и x_2.

а) Који услов задовољавају коефицијенти p и q ако је $x_1 - x_2 = m$, где је m дат број? Изразити, у том случају, минимум тринома $f(x)$, као функцију од величине m.

б) Из претпоставке

$$x_1 - x_2 = 1 \quad \text{и} \quad p + q = -1$$

решити једначину (1). Добивене резултате проверити на графику функције $y = f(x)$.

218.* Дат је трапез $ABCD$, са правим угловима у теменима A и D. Ставимо:

$$AD = h, \quad AB = b, \quad CD = b_1, \quad BC = a.$$

Који однос постоји међу странама датог трапеза?

а) Претпоставимо да страна BC додирује круг, са средиштем O описан над AD као пречником. Показати у том случају:

1. $a = b + b_1$, 2. $\triangle OBC$ је правоугли, 3. површина трапеза се може изразити као функција само од b и b_1.

219. Zadana je kružnica

$$k \equiv \left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$$

i izvan nje dvije točke

$$M_1\left(1 - 2\sqrt{2}, \ \frac{7 + 2\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{i}$$

$$N\left(1 + 2\sqrt{2}, \ \frac{7 - 2\sqrt{2}}{4}\right)$$

u ravnini kružnice. Treba odrediti analitički i konstruktivno one kružnice, koje prolaze točkama M i N i diraju zadanu kružnicu k.

220. Neka se riješi i diskutira jednadžba

$$\sqrt{m^2x^2 + 1} = x - \frac{m}{2}.$$

Za diskusiju uzmi u obzir, da x mora biti veće od $\frac{m}{2}$.

221.* Skrati $\dfrac{m^{12} + n^{12}}{m^5 + m^4n + mn^4 + n^5}$.

222.* Izračunaj:

$$\frac{(5c - 6d)^2 - (3a - 4b)^2}{25c^2 - (6d + 3a - 4b)^2} - \frac{25c^2 - (6d - 3a + 4b)^2}{36d^2 - (3a - 4b + 5c)^2} - \frac{36d^2 - (3a - 4b - 5c)^2}{(3a - 4b)^2 - (5c + 6d)^2}.$$

223. Nad svakom stranicom istostranična trokuta kao bazom i prema izvanjoj strani trokuta konstruiran je istokračni trokut, komu su kraci jednaki a. Neka se izračuna kut α na bazi tog trokuta, ako je površina šesterokuta, koji je tako nastao, jednaka k^2.

224*. Riješi jednadžbu

$$\frac{x + a^2}{(a+b-c)\,(a-b+c)} - \frac{b^2 + c^2 - x}{(c-a-b)\,(b-a-c)} = 1.$$

225. Neka se odrede stranice b i c trokuta, komu je zadano a, površina P i $b = 3c$.

226. Neka se dokaže, da je *a*) produkt 2 uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 12, kad je veći od tih brojeva potpuni kvadrat; *b*) produkt 3 uzastopnih cijelih brojeva djeljiv sa 60, kad je srednji broj potpuni kvadrat.

227.** Neka se dokaže, da je polinom

$$(x - y)^5 - (y - x)^3$$

djeljiv s

$$(x - y + 1)^2 - 2\,(x - y)$$

i neka se odredi kvocijent bez dijeljenja.

B) Zadaci iz fizike

121.* Elastična kugla padne s visine $h = 78{,}48$ m na horizontalnu elastičnu ploču i od nje se odbije s brzinom, koja je jednaka $^3/_4$ brzine, s kojom je kugla pala na ploču. Pita se 1) do koje će se visine kugla popeti; 2) koliko je proteklo vrijeme od početka gibanja kugle do momenta, kad je drugiput udarila o ploču? (Trenje i otpor zraka ne uzimaju se u obzir.)

122.* Konično njihalo (= jednostavno njihalo, koje se giba po kružnici tako, da nit njihala pritom opisuje plašt stošca), dugačko je $l = 0{,}25\ m$, a kut pri vrhu je $2\alpha = 36^0$. Koliko je vrijeme T jednog okretaja njihala? A kolika je duljina l_1 onog jednostavnog njihala, kome bi dvostruko vrijeme njihaja bilo jednako vremenu okretaja T?

123. Zvuk zviždaljke na lokomotivi ima $n = 522$ titraja/sek. Lokomotiva se giba brzinom $v = 17\ m/sek$ pokraj mirnog promatrača. Koliki je broj titraja u sekundi od tonova, što ih on čuje, kad lokomotiva nailazi, odnosno od njega odlazi?

124. U tekućini, koja ima velik indeks loma $n = 2$, nalazi se izvor svjetlosti (žarulja), u dubini od 6 *cm* ispod površine tekućine. Koliki je polumjer kružnice, što je čine točke na površini tekućine, u kojima počinje totalna refleksija zraka svjetlosti, koje dolaze iz izvora svjetlosti?

125. Generator od 115 volti ima nutarnji otpor 1,5 oma i upotrebi se za punjenje 40 akumulatora serijski povezanih. Nutarnji otpor jednog akumulatora je 0,05 oma; za vrijeme punjenja svaki akumulator djeluje konstantnom elektromotornom silom od 2,2 volta (nasuprot elektromotornoj sili generatora). U krugu je ukopčan ampermetar, kojeg otpor možemo zanemariti. Pita se 1) koliki otpor moramo ukopčati (serijski) u krug struje, da se akumulatori nabijaju strujom od 5 ampera; 2) iz kruga uklonimo generator i zatvorimo opet krug; napetost svakog akumulatora je 2,1 volta. Pita se a) smjer struje prema smjeru struje nabijanja; b) kolika je jakost struje; c) kakav ampermetar treba upotrebiti, da ne bismo morali premještati žice s njegovih stezaljki pri nabijanju akumulatora i pri njihovom izbijanju; 3) izbijanje uz konstantnu jakost struje traje osam sati; koliki je kapacitet baterije; 4) koliku energiju daju akumulatori za vrijeme izbijanja?

C) Rješenja iz matematike

204. *Дат је $\triangle ABC$, чије су стране $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Извести услов који треба да задовољавају a, b и c, ако се тежишне линије (медијане) повучене из B и C, секу под правим углом.*

Позната је релација:

$$4\,t_b^2 = 2\,a^2 + 2\,c^2 - b^2,$$

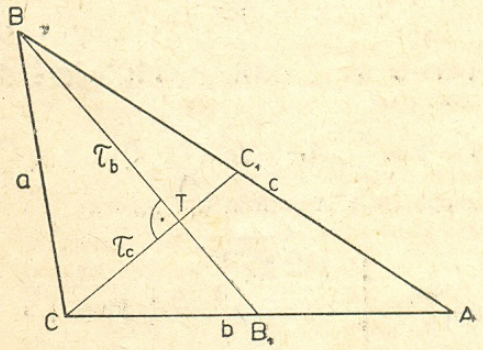
па и $$4\,t_c^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2.$$

Ако их саберемо имаћемо:

$$4\,(t_b^2 + t_c^2) = 4\,a^2 + b^2 + c^2 \quad \ldots (1)$$

Обележимо растојања од тежишта T до B и C са τ_b и τ_c. Тада је:

$$t_b^2 = \left(\frac{3\,\tau_b}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad t_c^2 = \left(\frac{3\,\tau_c}{2}\right)^2$$



што уврштено у (1) даје:

$$9\,(\tau_b^2 + \tau_c^2) = 4\,a^2 + b^2 + c^2 \quad \ldots (2)$$

$t_b \perp t_c$ па следи да је:

$$\tau_b^2 + \tau_c^2 = a^2$$

што заменимо у (2) те излази:

$$9\,a^2 = 4\,a^2 + b^2 + c^2$$

или $$5\,a^2 - b^2 - c^2 = 0.$$

Мудрински Војислав
уч. 7д р. г. Св. Марковић, Нови Сад.

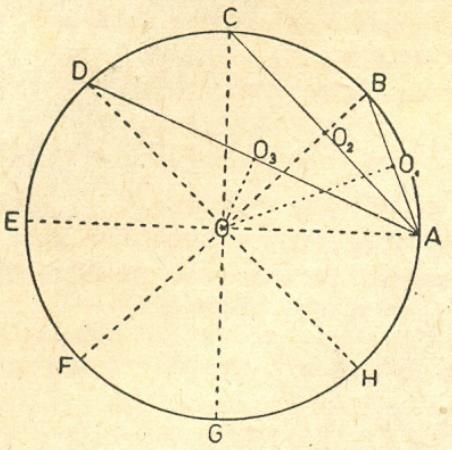
205. *Решити једначину $\cos 8x = 1$, затим на тригонометриском кругу означити крајеве лукова који претстављају решења дате једначине. Нека су то тачке A, B, C, ... Израчунати дужине тетива AB, AC, AD и т. д., као и њихова растојања од центра круга.*

Решење: Из једначине $\cos 8\,x = 1$ следује $8\,x = 2\,k\,\pi$, а одатле

$$x = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad \ldots . (1)$$

Дајући броју k вредности $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7$, добију се осам точака на тригонометриском кругу: $A, B, C, \ldots, G, H$.

Како су B и H, C и G, D и F симетричне у односу на AE, довољно је рачунати са тетивама AB, AC и AD и њиховим средишњим растојањима OO_1, OO_2 и OO_3.



Тако је из $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ и $\triangle OAD$, редом:

$$AB = 2\sin\frac{\pi}{8},\quad AC = 2\sin\frac{\pi}{4},\quad AD = 2\sin\frac{3\pi}{8},$$

односно, кад уврстимо вредности:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$AB = \sqrt{2-\sqrt{2}};\quad AC = \sqrt{2};\quad AD = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Из истих троуглова налазимо средишња растојања:

$$OO_1 = OA\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$OO_2 = OA\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad OO_3 = OA\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

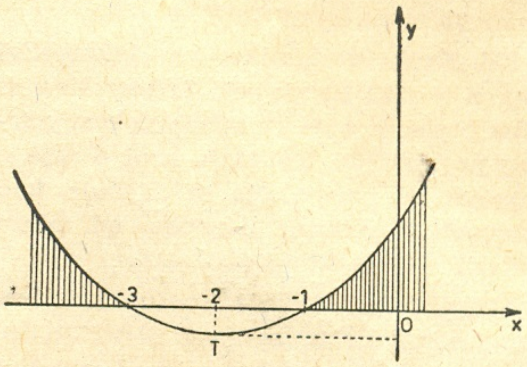
206. *Dati su polinomi:* $A = x^3 + x^2 - 9x - 9$, $B = (x-2)^2 - (x-4)^2$.

a) Formirati i uprostiti razlomak $f(x) = \frac{A}{B}$.

b) Ispitati znak funkcije $f(x)$ *za razne vrijednosti* x, *rezultat provjeriti na grafiku funkcije* $y = f(x)$.

c) Dokazati: 1. ako je x *paran broj, razlomak* $f(x)$ *je nesvodljiv; 2. ako je* x *neparan broj, dati se razlomak svodi na polinom.*

a)
$$f(x) = \frac{A}{B} = \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x-2)^2 - (x-4)^2} = \frac{x^2(x+1) - 9(x+1)}{(x-2+x-4)(x-2-x+4)} = \frac{(x+1)(x^2-9)}{(x-3)\cdot 4} = \frac{(x+1)(x+3)}{4}.$$



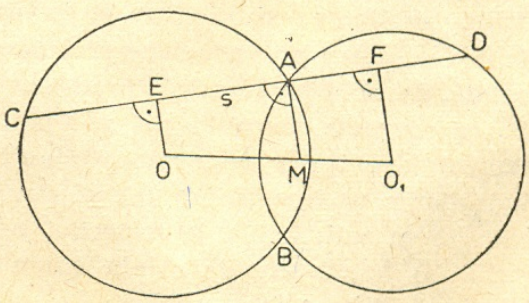
b) $f(x) > 0$, ako je $x < -3$ ili $x > -1$,
$f(x) = 0$, „ $x = -1$, $x = -3$,
$f(x) < 0$, „ $-3 < x < -1$.

Grafik je parabola, kojoj je vrh $T\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$, i koja siječe os x u $x = -1$, $x = -3$.

c) Ako je x paran broj, x je oblika $x = 2n$, pa izlazi $f(x) = \frac{(2n+1)(2n+3)}{4} = \frac{4n^2+8n+3}{4}$, što je očito nesvodljivo; ako je $x = 2n+1$, onda je $f(x) = n^2 + 3n + 2$ t. j. razlomak se svodi na polinom.

Martinis Vinko
uč, 7. r. g. „F. Višnjić“, Bijeljina.

207. *Две кружне линије се секу у тачкама* A *и* B; *нека се тачком* A *повуче правац* s *тако, да се тетива* AC *прве кружне линије односи према тетиви* AD *друге кружне линије као* $3:2$ *или као две произвољно задане дужине! Тетиве* AC *и* AD *леже на секанти* s.



Претпоставимо да је задатак решен. Нека је:

$$AC : AD = 3 : 2$$

Обележимо половине тих тетива са E и F. Тада је и

$$EA : AF = 3 : 2$$

Спојимо центре кругова и повуцимо нормалу у A ($AM \perp s$).

Тада је $OE \parallel MA \parallel O_1F$ па следи да је:

$$EA : AF = OM : MO_1$$

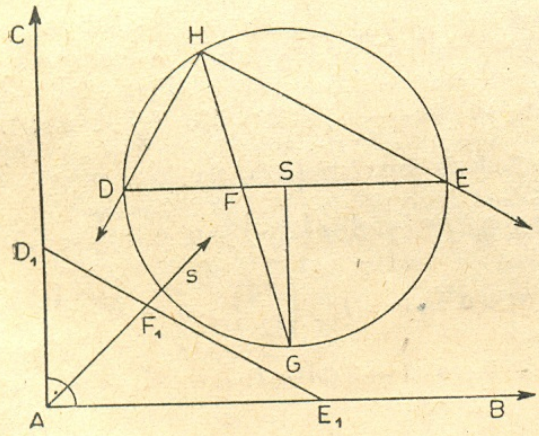
Према томе решење гласи. Централну раздаљину треба поделити у размери 3 : 2, тачком M, која се споји са A и на дуж AM у A повуче нормала s ($s \perp AM$). Секанта s ће пресеком са круговима дати тетиве AC и AD које ће се односити као 3 : 2.

Ако место 3 : 2 ставимо $m : n$ где су m и n било који произвољно изабрани бројеви тетиве AC и AD ће се преко истог поступка од осити као $m : n$.

Мудрински Војислав, уч. 7. р. г. „Св. Марковић“, Нови Сад.

208. *Zadan je pravi kut BAC, njegova simetrala s i dužina DE; na toj dužini zadana je točka F tako, da je DF < FE. Neka se dužina DE položi tako, da točka D padne na krak AC, točka E na krak AB, a točka F na simetralu s!*

Rješenje: Nad dužinom DE kao promjerom nacrta se kružnica i odredi sredina G donje polukružnice; pravac GF siječe gornju polukružnicu u točki H. Pravci DH i EH zatvaraju pravi kut DHE, kojemu je pravac FG simetrala.



Načinimo li $AD_1 = HD$, $AE_1 = HE$, traženi položaj dužine DE je D_1E_1.

Zadatak ima svagda rješenje, ali samo jedno.

209. *Izračunaj:*

$$A = \frac{(2a-3b)^2-a^2}{4a^2-(3b+a)^2} + \frac{4a^2-(3b-a)^2}{9(a^2-b^2)} + \frac{(2a+3b)^2-a^2}{9b^2-a^2}.$$

$$A = \frac{(2a-3b-a)(2a-3b+a)}{(2a-3b-a)(2a+3b+a)} + \frac{(2a-3b+a)(2a+3b-a)}{9(a^2-b^2)} + \frac{(2a+3b-a)(2a+3b+a)}{9b^2-a^2} =$$

$$= \frac{3(a-b)}{3(a+b)} + \frac{3(a-b)(a+3b)}{9(a^2-b^2)} + \frac{3(a+b)(a+3b)}{9b^2-a^2} =$$

$$= \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+3b}{3(a+b)} + \frac{3(a+b)}{3b-a} =$$

$$= \frac{3(a-b)(3b-a)+9b^2-a^2+9(a+b)^2}{3(a+b)(3b-a)} =$$

$$= \frac{1}{3(a+b)(3b-a)}(9ab-9b^2-3a^2+3ab+9b^2-a^2+9a^2+18ab+9b^2) =$$

$$= \frac{5a^2+30ab+9b^2}{3(a+b)(3b-a)}.$$

Miketinac Milivoj, 6a r. 12. g., Zagreb.

210. *Neka se riješi i diskutira sistem:*

$$(m^2+1)x + (m+1)y = m-1 \ldots (1)$$
$$(m^2-1)x + (m-1)y = m+1 \ldots (2)$$

Da sistem bude moguć mora biti:

$$(m^2+1)(m-1) - (m+1)(m^2-1) \neq 0$$

t. j.

$$2m(1-m) \neq 0$$

što ispunjava ako je:

$$0 \neq m \neq 1.$$

Za te vrijednosti od m biće:

$$x = \frac{(m-1)(m-1)-(m+1)(m+1)}{(m^2+1)(m-1)-(m+1)(m^2-1)} = \frac{2}{m-1},$$

$$y = \frac{(m^2+1)(m+1)-(m-1)(m^2-1)}{(m^2+1)(m-1)-(m+1)(m^2-1)} = \frac{m+1}{1-m}.$$

Sistem nemoguć; nema rješenja ako je: $2m(1-m) = 0$ i $(m-1)(m-1) - (m+1)(m+1) \neq 0$ ili $-4m \neq 0$ t. j. za $m = 1$.

Ako su koeficijenti (1) i (2) proporcionalni sistem će biti neodređen t. j. ima ∞ mnogo rješenja:

$$\frac{m^2+1}{m^2-1} = \frac{m+1}{m-1} = \frac{m-1}{m+1}.$$

Odavde se dobiju 2 jednačine:

$$\frac{m^2+1}{m^2-1}=\frac{m+1}{m-1} \quad \text{i} \quad \frac{m+1}{m-1}=\frac{m-1}{m+1}.$$

Iz obadvije dobije se:

$m=0$ (za $m=0$ sistem neodređen),
$x<0,\ y<0$ za $m<-1$,
$x<0<y$ za $-1<m<1$,
$y<0<x$ za $m>1$.

Martinis Vinko
uč. 7. r. g. „F. Višnjić", Bijeljina.

211. *Neka se odrede stranice trokuta, ako poznamo simetralu kuta i težišnicu, koje izlaze iz vrha A, te je ujedno* $2a=b+c$.

U planimetriji a i u trigonometriji se uči, da je dužina simetrale kuta

$$s_\alpha=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc\,(b+c+a)\,(b+c-a)}.$$

Kako je $b+c=2a$, to je

$$s_\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{3bc} \quad \text{ili} \quad bc=\frac{4s_\alpha^2}{3}.$$

Također je poznata formula za težišnicu t_a:

$$4t_a^2=2(b^2+c^2)-a^2 \quad \text{ili}$$

$$b^2+c^2=2t_a^2+\frac{a^2}{4} \quad \text{t. j.}$$

$$(b+c)^2-2bc=(b+c)^2-\frac{8s_\alpha^2}{3}=$$

$$=2t_a^2+\frac{(b+c)^2}{8}.$$

Odakle izlazi

$$(b+c)^2=\frac{16}{7}\left(t_a^2+\frac{4s_\alpha^2}{3}\right).$$

Dakle su b i c korijeni jednadžbe

$$u^2-\frac{4}{\sqrt{7}}\sqrt{t_a^2+\frac{4s_\alpha^2}{3}}\,u+\frac{4s_\alpha^2}{3}=0.$$

Da brojevi b i c budu realni i pozitivni, mora još biti, jer je već $S>0$, $P>0$, ispunjen uvjet $D\geqq 0$ t. j.

$$\frac{16}{7}\left(t_a^2+\frac{4s_\alpha^2}{3}\right)-\frac{16s_\alpha^2}{3}\geqq 0 \quad \text{ili} \quad t_a\geqq s_\alpha.$$

Treba još napisati uvjetne jednadžbe, koje kazuju, da trokut postoji t. j.

$$(b-c)^2\leqq a^2<(b+c)^2;$$

drugi je uvjet ispunjen, jer je $a=\frac{1}{2}(b+c)$; iz $a^2\geqq(b-c)^2$ izlazi

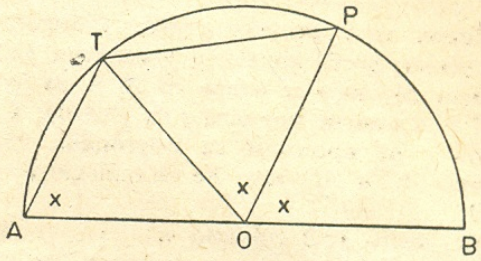
$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2>(b+c)^2-4bc \quad \text{ili}$$

$$4bc\geqq\frac{3}{4}(b+c)^2 \quad \text{t. j.}$$

$$\frac{s_\alpha^2}{3}\geqq\frac{3}{28}\left(t_a^2+\frac{4}{3}s_\alpha^2\right) \quad \text{ili} \quad t_a\leqq\frac{4}{3}s_\alpha,$$

dakle ukupno $s_\alpha\leqq t_a\leqq\frac{4}{3}s_\alpha$.

212. *Ako je T točka polukružnice promjera* $AB=2r$, *središta O i ako se povuče polumjer OP paralelan s AT, neka se odredi položaj točke T tako da* $AT+TP$ *bude jednako zadanoj veličini* $m\cdot 2r$. *Diskusija!*



Mora biti $AT+TP=m\cdot 2r$.

Ako je $\sphericalangle TAB=x$, to je i $\sphericalangle TOP=x$ i $\sphericalangle POB=x$. $AT=2r\cos x$, $TP=2r\sin\frac{x}{2}$, pa imamo jednadžbu:

$$2r\cos x+2r\sin\frac{x}{2}=m\cdot 2r \quad \text{ili}$$

$$\cos x+\sin\frac{x}{2}=m \quad \text{t. j.}$$

$$2\sin^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+m-1=0.$$

Kako se x može mijenjati od 0 do $\frac{\pi}{2}$, $\frac{x}{2}$ se može mijenjati od 0 do $\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{x}{2}$ od 0 do $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je samo jedan korijen između 0 i $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ako je $f(0)\,f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$ t. j.

$(m-1)\left(m-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$ ili $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1$.

Zadatak ima 2 rješenja, ako je

$$D\geqq 0,\ f(0)>0,\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0,\ 0<\frac{S}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$f(0)>0$ za $m>1$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$ za $m>\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$D\geqq 0$ za $1-8(m-1)\geqq 0$ ili $m\leqq\frac{9}{8}$,

$0<\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ uvijek je ispunjeno. Svi su ti uvjeti ispunjeni za $1<m\leqq\frac{9}{8}$.

213. *Neka se dokaže, ako razlomak*

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

pretvorimo u decimalni razlomak, on je uvijek mješovito periodski.

Načinimo zbroj s zadanih razlomaka: izlazi

$$s=\frac{n(n+1)+(n-1)(n+1)+n(n-1)}{(n-1)n(n+1)}=$$
$$=\frac{3n^2-1}{(n-1)n(n+1)},$$

pa pogledajmo najprije nazivnik $(n-1)n(n+1)$. To je umnožak 3 uzastopnih cijelih brojeva; jedan od tih brojeva je djeljiv s 3, te je i umnožak djeljiv s 3. Razmotrimo sad brojnik $3n^2-1$, on podijeljen s 3 daj ostatak -1 t. j. on nije djeljiv s 3. To znači, da se razlomak ne može skratiti s 3, pa nazivnik sadrži 3 kao faktor.

Jedan od 3 brojeva $n-1$, n, $n+1$ ili 2 od njih su djeljivi s 2; ako je samo jedan, to je srednji n; tad je brojnik $3n^2-1$, neparan broj, jer je $3n^2$ paran, dakle u nazivniku dolazi sigurno 6 kao faktor. Ako su od 3 uzastopna broja 2 od njih parna, to su jedino $n-1$ i $n+1$; kako je jedan od tih brojeva djeljiv s 4, umnožak je djeljiv s 8; jer je u tom slučaju n neparan broj, on je oblika $2k-1$, pa je brojnik

$$3n^2-1=3(2k-1)^2-1=12k^2-12k+2$$

t. j. on je djeljiv samo s 2, pa u nazivniku dolazi faktor 2^2.

Dakle u svakom slučaju u nazivniku dolazi i faktor 2 i faktor 3, pa se kod pretvaranja dobivenog razlomka u decimalni dobiva mješovito periodski decimalni razlomak.

Nikolić Ilonka, uč. 7. r. g., Đakovo.

214. *Neka se dokaže: ako 3 broja x, y, z, koja nemaju zajedničke mjere, zadovoljavaju relaciju $x^2+y^2=z^2$, da je 1) jedan od brojeva x i y mnogokratnik od 3, 2) jedan od brojeva x i y mnogokratnik od 4, 3) jedan od brojeva x, y i z mnogokratnik od 5.*

1) Svaki cijeli broj N jednog je od oblika $3q$, $3q+1$ ili $3q-1$, N^2 je ili mnogokratnik od 3 ili podijeljen s 3 daje ostatak 1. Kad nijedan od oba broja x, y ne bi bio djeljiv s 3, imali bismo $x^2=3q'+1$, $y^2=3q''+1$ i odatle $x^2+y^2=z^2=3Q+2$. Posljednja je jednakost nemoguća, jer prema predašnjem kvadrat nijednog cijelog broja podijeljen s 3 ne može dati ostatak 2. Dakle je jedan od brojeva x, y sigurno djeljiv s 3.

2) Jedan od brojeva x i y sigurno je paran broj; kad bi oba broja bila neparna, oni bi bili oblika $x=2q+1$, $y=2q'+1$ i $x^2=4Q+1$, $y^2=4Q'+1$ i $x^2+y^2=z^2=4Q+2$. No ta jednakost ne može postojati, jer je kvadrat cijelog broja oblika ili $4k$ ili $4k+1$. Treba još dokazati, da je jedan od brojeva x i y djeljiv s 4. Uzmimo da je na pr. x paran broj, te je $x=2k$; y je sigurno neparan broj, inače bi x, y i z imali zajednički faktor, što se protivi pretpostavci. Dakle je y oblika $2k'+1$; z^2 je oblika $4k^2+4k'^2+4k'+1=4l+1$ t. j. z je neparno oblika $2l'+1$. Iz $x^2=z^2-y^2$ izlazi $4k^2=4l'^2+4l'+1-4k'^2-4k'-1$ ili $k^2=(l'-k')(l'+k'+1)$. Kako je zbroj faktora $l'-k'+l'+k'+1=2l'+1$ t. j. neparan broj, znači, da je jedan od faktora $l'-k'$, $l'+k'+1$ paran, dakle je k^2 paran broj pa je dakle i k paran broj, te je $x=2k$ ne samo mnogokratnik od 2 već i od 4.

3) Svaki cijeli broj N jednog je od oblika $5k$, $5k\pm1$, $5k\pm2$; a N^2 je oblika $5k$, $5k\pm1$. Kad nijedan od brojeva x, y, ne bi bio mnogokratnik o 5, $x^2+y^2=z^2$ bilo bi ili oblika $5Q$ (u slučaju da je $x^2=5k+1$, $y^2=5k'-1$ ili obrnuto), ili oblika $5Q\pm2$ (u slučaju da je $x^2=5k+1$, $y^2=5k'+1$ ili $x^2=5k-1$, $y^2=5k'-1$). Kako pak $z^2=x^2+y^2$ ne može biti oblika $5Q\pm2$, ostaje jedino, da je z^2 mnogokratnik od 5 t. j. z mnogokratnik od 5 i prema tomu jedan od brojeva x, y, z djeljiv je s 5.

215. *Ако број a није дељив с 5, број a^4-1 је сигурно дељив с 5.*

Имамо да је:

$$a^4-1=(a^2-1)(a^2+1).$$

Чиниоци a^2-1 и a^2+1 су два суседна броја од a^2. Како број a не сме имати крајњу цифру 5 ни 0 то ни a^2 неће је имати. Међутим a^2 неће имати за крајњу цифру ни 2, 3, 7 и 8 јер нема броја чији се квадрат завршава једном од њих.

Остали су само још 1, 4, 6 и 9 као могуће крајње цифре од a^2. То су суседни бројеви од 5 и 0. Па како се a^2 једним од њих мора завршавати, један од чинилаца a^2-1 и a^2+1 биће дељив с 5, па самим тим и број a^4-1.

Мудрински Војислав,
уч. 7д р. г. Св. Марковић, Нови Сад

Napomena uredništva: Ovaj je poučak specijalan slučaj *Fermat*-ova poučka, koji kazuje: *ako a nije mnogokratnik prostog broja p, $a^{p-1}-1$ je djeljivo s p.*

Решили задатке из 4 броја

Брусић Миливој, уч. 6_4 р. г. Зрењанин, 204, 206, 209, 210, 213; *Дамић Вучић*, уч. 8 раз. г. Иванград, 204, 209; *Ђорђевић Д. Владан*, уч. 8 раз. г. Крушевац, 204, 206, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 215; *Ковачевић Д. Мирослав*, уч. 6_1 раз. г. Трстеник, 209, 210; *Маринов Трче*, ученик 7г кл. гимн. „Ј. Б. Тито", Битола, 204, 205, 206 (деломично), 209, 210; *Маринова Викторија*, уч. 7 кл. г. „Ј. Б. Тито", Битола, 206 (дел.), 209, 210; *Мудрински Војислав*, уч. 7д р. г. „Св. Марковић", Нови Сад, 204, 207, 208, 209, 210, 212, 215; *Ратковић Томислав*, уч. 5^6 р. гимн. Крушевац, 210; *Kovač Antal*, uč. 6a r. mađ. g. Sombor, 207, 208, 209, 210, 215; *Lojen Miroslav*, uč. 5b r. g. Varaždin, 208, 209, 210; *Ljupša Danilo*, uč. 7c raz. 1. gimn. Maribor, 204, 209, 210; *Martinis Vinko*, uč. 7. r. g. „F. Višnjić, Bijeljina, 204, 205, 206, 209, 210, 211, 215; *Miketinac Milivoj*, uč. 6a raz. 12. g. Zagreb, 204, 209, 211, 214 (djel.); *Nikolić Ilonka*, uč. 7. r. g. Đakovo, 205, 206, 209, 210, 214, 215. *Ćepulić Vladimir*, 6.c r. kl. g. Zagreb, 204, 205, 206, 209, 215.

D) Rješenja zadataka iz fizike

116.* *Da bi jednostavno njihalo, duljine $l = 0{,}75$ m opisivalo plašt stošca, kojemu je kut pri vrhu $2\alpha = 60°$, — moramo mu dati brzinu u smjeru tangente na osnovku tog stošca. Kolika je ta brzina v?*

Rješenje: Centripetalna sila F pri kružnom gibanju tijela bit će

$$F = \frac{mv^2}{r} = mg\,tg\alpha.$$

Budući da je $r = l\sin\alpha$, bit će:

$$\frac{v^2}{l\sin\alpha} = g\,tg\alpha$$

$$v = \sqrt{g\,l\sin\alpha\,tg\alpha}$$

$$\underline{v = 1{,}457\ m/sek.}$$

117.* *Koju bi duljinu trebala imati olovna žica, obješena na jednom svom kraju, da se zbog vlastite težine prekine? (Spec. tež. olova je $s = 11{,}4\ g^*/cm^3$, a čvrstoća istezanja mu je $k = 2\ kg^*/mm^2$).*

Rješenje: Žica mora biti toliko dugačka, da je njena težina jednaka čvrstoći istezanja pomnoženoj s brojem kvadratnih milimetara presjeka (q):

$$l \cdot \frac{q}{100} \cdot s = k \cdot q$$

$$l = \frac{2000 \cdot 100}{11{,}4}\ cm$$

$$\underline{l = 175{,}44\ m.}$$

Riješili: *Šimunić Bruno*, 7. r. IV. g. Zagreb; *Маринов Трпче*, 7. кл. В. г. Битола; *Miketinac Milivoj*, 6.a r. 12. g. Zagreb.

118. *Horizontalno drveno homogeno vreteno (gustoća $\rho = 0{,}9g/cm^3$, duljine $l = 100$ cm, promjera $2r = 20$ cm) može se vrtjeti oko svoje osi. Na njemu je učvršćeno tanko uže, koje je mnogo puta pravilno namotano oko vretena; na slobodnom kraju užeta obješeno je tijelo mase $m = 1570$ g. Pita se: 1) kolikom akceleracijom giba se (vertikalno prema dolje) obješeno tijelo mase m; 2) kako duboko će tijelo stići nakon 10 sekundi jednoliko-ubrzanog gibanja prema dolje? (Moment tromosti ili ustrajnosti, valjkastog vretena je $U = \frac{1}{2}m_v r^2$, gdje je m_v masa vretena. Trenje zanemarujemo).*

Rješenje: 1) Nakon što je uteg mase m propadao visinu h bit će ukupna kinetička energija utega i valjkastog vretena

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{U \cdot \omega^2}{2}$$

(v je brzina padanja utega u tom trenutku, a ω je kutna brzina vretena). Ta je kinetička energija nastala na račun smanjenja potencijalne energije utega mase m, koja je jednaka mgh; dakle je

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{U \cdot \omega^2}{2};$$

budući da je $\omega = \frac{v}{r}$, imamo:

$$mgh = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{U}{r^2}\right).$$

Gibanje je jednoliko ubrzano s nepoznatom akceleracijom γ, pa će biti

$$v = \sqrt{2\gamma h}$$

i prema tome

$$mg = \left(m + \frac{U}{r^2}\right)\gamma = \left(m + \frac{m_v r^2}{2} \cdot \frac{1}{r^2}\right)\gamma,$$

a kako je masa valjkastog vretena $m_v = r^2\pi l\rho$, bit će

$$mg = (m + \frac{1}{2}r^2\pi\,l\,\rho)\,\gamma,$$

odatle konačno akceleracija γ izlazi:

$$\gamma = \frac{2m}{2m + r^2 \pi l \rho} \cdot g =$$

$$= \frac{2 \cdot 1570}{2 \cdot 1570 + 10^2 \cdot 3{,}14 \cdot 100 \cdot 0{,}9} \cdot 981$$

$$\gamma = 98{,}1 \; cm/sek^2 \; (= \frac{1}{10} g)$$

2) Nakon $t_1 = 10$ sekundi uteg će pasti u dubljinu h_1:

$$h_1 = \frac{\gamma}{2} \cdot t_1^2$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot 98{,}1 \cdot 10^2$$

$$h_1 = 4905 \; cm = 49{,}05 \; m.$$

Riješili: *Šimunić Bruno*, 7. r. IV. gim. Zagreb (približno); *Дашић Вучић*, 8 p. r. Иванград, (приближно).

119. *Kuglasti balon, volumena 800 m^3 i ukupne težine (tvar balona, plin, gondola i teret) $Q = 1000$ kg*, uspinje se uvis. Pita se: 1) koliku najveću brzinu postizava balon pri tom uspinjanju; 2) koliku će akceleraciju ponovo dobiti balon u trenutku, kad se iz njega izbaci 100 kg* tereta (pijeska); 3) kolika je u tom slučaju novopostignuta maksimalna brzina? (Izračunajte je ne kao pod točkom 1), nego, jednostavnije, uz pomoć razmjera!) — [Uputa: najveću brzinu balon postizava, kad sila uspinjanja balona postane jednaka otporu zraka $O = kqv^2$ (konstanta $k = 0{,}027$, ako brzinu v mjerimo u m/sek, površinu presjeka q u m^2, a otpor O u kg*)].*

Rješenje: 1) Sila uspinjanja F balona jednaka je razlici uzgona i težine balona

$$F = 800 \cdot 1{,}3 - 1000 = 40 \; kg^*.$$

Tu silu mora dostići otpor zraka $O = k q v^2$; dakle je

$$k g v^2 = 40$$

$$v = \sqrt{\frac{40}{kq}}.$$

Presjek q kuglastog balona izračunamo iz njegovog volumena

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$q = r^2 \pi = \pi \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}$$

$$q = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4} V\right)^2 \cdot \pi} = \sqrt[3]{\frac{9}{16} \cdot 800^2 \cdot 3{,}14}$$

$$q = 104 \; m^2,$$

pa je prema tome brzina v uspinjanja (najveća) balona

$$v = \sqrt{\frac{40}{0{,}027 \cdot 104}}$$

$$v = 3{,}77 \; m/sek.$$

2) Nakon što izbacimo teret, smanjit će se težina balona za 100 kg*, dok uzgon ostaje isti. Prema tome bit će sad nova sila F_1 uspinjanja:

$$F_1 = 800 \cdot 1{,}3 - 900 = 140 \; kg^*;$$

ona ubrzava masu od 900 kg. Prema temeljnoj jednadžbi gibanja $F = m a$ imamo

$$140 \cdot 1000 \cdot 981 = 900 \cdot 1000 \cdot a$$

$$a = \frac{140 \cdot 981}{900} \; cm/sek^2$$

$$a = 152{,}6 \; cm/sek^2 = 1{,}53 \; m/sek^2.$$

3) Novu konačnu brzinu mogli bismo izračunati kao pod točkom 1). Ali se ona može naći jednostavnije i brže iz razmjera. Imamo za novu brzinu:

$$k q v_1^2 = 140,$$

dok smo prije imali

$$k q v^2 = 40.$$

Podijelimo li ove dvije jednadžbe dobivamo razmjer:

$$v_1^2 : v^2 = 140 : 40$$

$$v_1 = v \cdot \sqrt{\frac{140}{40}} = 3{,}77 \sqrt{3{,}5}$$

$$v_1 \approx 7 \; m/sek.$$

Riješili: *Šimunić Bruno*, 7. r. IV. g. Zagreb (pribl.); *Маринов Трпче*, 7 кл. В. г. Битола; *Miketinac Milivoj*, 6.a r. 12. g. Zagreb (1. točku).

120. *Tanki sloj zraka, širine d, omeđen je s dvije točno paralelne stranice dviju vrlo debelih staklenih ploča AA' i BB' (vidi sliku u zadacima prošlog broja Mat.-fiz. lista). Zrake svjetlosti, koje se reflektiraju na plohi A i na plohi B, međusobno interferiraju; te zrake padaju okomito na plohe A, odnosno B. (Treba imati na umu, da se refleksija na plohi A vrši bez promjene znaka, dok ona na plohu B sa promjenom znaka). Treba odrediti: 1) razliku u fazi dviju reflektiranih zraka, one, reflektirane na A i one na B (općenito); 2) koje vrijednosti mora imati razmak d da bi se utr-*

nule svjetlosti, kojih su duljine vala 0,8 μ, 0,6 μ i 0,4 μ; 3) koje sve duljine vala odjednom utrnu, ako je razmak d jednak 0,1 mm?

Rješenje: 1) Razlika u fazi bit će tolika kao da je druga zraka ne samo prevalila razmak d tamo i natrag, nego još i $\frac{\lambda}{2}$ (jer s znak vala promjeni):

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2}.$$

2) Da bi se utrnula svjetlost valne duljine λ, mora δ biti jednak neparnom broju pomnoženom sa $\frac{\lambda}{2}$:

$$2d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

a odatle izlazi $d = k \cdot \frac{\lambda}{2}$.

Širine razmaka d, da bi se utrnula crvena svjetlost duljine vala 0,8 μ, bit će, prema tome:

$$d = 0{,}4\,\mu;\ 0{,}8\,\mu;\ 1{,}2\,\mu;\ \ldots$$

a da se utrne žuta svjetlost valne duljine 0,6 μ:

$$d = 0{,}3\,\mu;\ 0{,}6\,\mu;\ 0{,}9\,\mu;\ 1{,}2\,\mu;\ \ldots$$

konačno da bi se gasila ljubičasta svjetlost valne uljine 0,4 μ, treba biti

$$d = 0{,}2\,\mu;\ 0{,}4\,\mu;\ 0{,}6\,\mu;\ \ldots$$

Da bi se utrnule sve tri spomenute svjetlosti odjednom treba uzeti takvu širinu razmaka d, koja će biti zajednički mnogokratnik od 0,2, 0,3, 0,4, dakle

$$d = k \cdot 1{,}2\,\mu.$$

3) Iz gornjeg uvjeta $d = k \cdot \frac{\lambda}{2}$ za gašenje svjetlosti valne duljine λ, imamo, ako je zadan razmak d: $\lambda = \frac{2d}{k}$.

To znači, da će se utrnuti sve svjetlosti, kojih valna duljina zadovoljava gornju formulu za bilo koji k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Izrazimo li d u mikronima, t. j. $d = 100\,\mu$, imamo:

$$\lambda = \frac{200}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ipak moramo vrijednosti za k ograničiti tako, da leže između vrijednosti k_1, koja odgovara krajnjoj crvenoj svjetlosti u spektru, i vrijednosti k_2, koja odgovara krajnjoj ljubičastoj svjetlosti. Pretpostavimo li, da se vidljiva svjetlost nalazi između $\lambda_1 = 0{,}8\,\mu$ i $\lambda_2 = 0{,}4\,\mu$, vrijednosti za k_1 i k_2 bit će dane izrazima

$$0{,}8 = \frac{200}{k_1} \quad \text{i} \quad 0{,}4 = \frac{200}{k_2};$$

znači: $k_1 = 250$ i $k_2 = 500$.

Prema tome izlazi, da će se utrnuti — uz dani uvjet, da je razmak $d = 0{,}1\ mm$ — 251 boja svjetlosti, koje imaju duljinu vala

$$\lambda = \frac{200}{250}\mu, \frac{200}{251}\mu, \frac{200}{252}\mu, \ldots$$

$$\ldots, \frac{200}{498}\mu, \frac{200}{499}\mu, \frac{200}{500}\mu.$$

Međutim, ove su boje rasprostrte po čitavom spektru, tako da naše oko ne će zamjetiti njihovo gašenje, nego će imati dojam, da je reflektirana svjetlost — bijela. To znači, za takvu veličinu (0,1 *mm*) razmaka d, oko više ne zamjećuje spomenutu interferenciju. Ali ta bijela svjetlost, što je oko zamjećuje, nije jednaka bijeloj svjetlosti, što je daje jako užarena platina. Kad bismo, naime, našu reflektiranu „bijelu" svjetlost pustili u jedan spektroskop, dobili bismo neprekidni spektar izbrazdan sa 251 tamnom prugom, koje odgovaraju onim bojama svjetlosti, što su se utrnule interferencijom.

Vježbe iz matematike za učenike viših razreda gimnazije

Izračunavanje algebarskih izraza uvođenjem trigonometrijskih funkcija pomoćnih kutova

I.

1. U osnovnom kursu trigonometrije naučili smo neke važne relacije između funkcija jednog te istog kuta. Najčešće smo pri transformacijama u goniometriji upotrebljavali relaciju

(A) $$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

koja pokazuje, da je zbroj kvadrata sinusa i kvadrat kosinusa bilo kojeg kuta jednak jedinici.

Ova se relacija može iskoristiti za izračunavanje nekih algebarskih izraza. Imamo li na pr. izraz

(1) $$x = \sqrt{1 - 0{,}45140^2}$$

i stavimo li

(1′) $$\sin\varphi = 0{,}45140,$$

tada je

$$x = \sqrt{1 - \sin^2\varphi},$$

a prema relaciji *(A)* nalazimo, da je

$$x = \cos\varphi.$$

Prema tome, treba naći kut iz jednadžbe (1′) i potom odrediti koliki je kosinus tog kuta. Time dobivamo traženu vrijednost od x.

Iz tablice prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija nalazimo da je

$$\varphi = 26°50';$$

dakle je

$$x = \cos\varphi = 0{,}89232.$$

Istu vrijednost bismo dobili, da smo radikand u (1) rastavili na faktore:

$$x = \sqrt{(1 - 0{,}45140)\,(1 + 0{,}45140)},$$

$$x = \sqrt{0{,}54860 \cdot 1{,}45140}$$

i cio izraz tada logaritamski izračunali, ili, da smo kvadrirali 0,45140, tu vrijednost oduzeli od 1 i našli vrijednost kvadratnog korijena te diferencije. U oba posljednja slučaja utrošili bismo više vremena za izračunavanje izraza x.

Isto tako kao u prvom primjeru može se izračunati bilo koji izraz oblika

$$y = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad (a > b)$$

s tim, da se transformira u

$$y = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Na pr.: Izračunati katetu pravokutnog trokuta, kojemu je hipotenuza 7,5 m, a druga kateta 2,376 m.

Bit će dakle

$$y = \sqrt{7{,}5^2 - 2{,}376^2}$$

$$y = 7{,}5\sqrt{1 - \left(\frac{2{,}376}{7{,}5}\right)^2}$$

$$y = 7{,}5\sqrt{1 - 0{,}3168^2};$$

stavimo li

$$\sin\varphi = 0{,}3168,$$

tada je

$$\varphi = 18°28'11'',$$

$$\cos\varphi = 0{,}94849$$

i $$y = 7{,}5 \cdot \cos\varphi = 7{,}5 \cdot 0{,}94849,$$

$$y = 7{,}1137.$$

2. Za izračunavanje izraza

$$z = \sqrt{1 + a^2}$$

odnosno

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

mogu se upotrebiti relacije

$$(B) \qquad 1 + tg^2\Theta = sec^2\Theta = \frac{1}{\cos^2\Theta}$$

odnosno

$$(C) \qquad 1 + ctg^2\Theta = csc^2\Theta = \frac{1}{\sin^2\Theta}.$$

Na pr.: Izračunati izraz

$$(2) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{1 + 3{,}6977^2}}!$$

Stavimo li

$$(2') \qquad 3{,}6977 = ctg\,\Theta,$$

tada je

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2\Theta}},$$

a prema relaciji *(C)*

$$u = \sin\Theta.$$

Izračunamo li dakle Θ iz (2'), dobivamo

$$\Theta = 15°08',$$

$$u = \sin\Theta = 0{,}26219.$$

Naravno, da smo za rješenje tog zadatka mogli uzeti i relaciju *(B)*; tada bi pomoćni kut Θ bio 74°52', no rezultat bi bio isti.

Uzmimo još jedan primjer:

Koliki je pobočni brid b uspravne piramide, ako je njegova projekcija na bazu piramide $b' = 23{,}21\,m$, a visina piramide je $v = 34{,}57\,m$?

Po Pitagorinom poučku je

$$b = \sqrt{b'^2 + v^2}$$

$$= \sqrt{23{,}21^2 + 34{,}57^2}$$

$$b = 23{,}21\sqrt{1 + \left(\frac{34{,}57}{23{,}21}\right)^2}.$$

Stavimo li

$$(3) \qquad \frac{34{,}57}{23{,}21} = tg\,\Theta,$$

tada je

$$b = 23{,}21\sqrt{1 + tg^2\Theta},$$

a prema (B)

$$(3') \qquad b = 23{,}21 \cdot \frac{1}{\cos\Theta} = \frac{23{,}21}{\cos\Theta}.$$

Treba dakle iz (3) izračunati kut Θ. Dijeljenjem dobivamo

$$tg\,\Theta = 1{,}4894,$$

$$\Theta = 56°07'19''.$$

Prema (3) je

$$b = \frac{23{,}21}{\cos 56°07'19''}$$

$$b = \frac{23{,}21}{0{,}55743}$$

$$b = 41{,}64\,m.$$

Do istog rezultata dolazimo kvadriranjem *i* nalaženjem vrijednosti drugog korijena.

Postavlja se sada pitanje: kakvo geometrijsko značenje ima pomoćni kut Θ?

Označimo li s φ kut, koji čini pobočni brid piramide sa svojom projekcijom, tada je

$$tg\,\varphi = \frac{v}{b'} = \frac{34{,}57}{23{,}21};$$

budući da je (nacrtaj sliku!)

$$\cos\varphi = \frac{b'}{b},$$

$$b = \frac{b'}{\cos\varphi},$$

vidimo, prema (3) i (3′) da je

$$\Theta = \varphi,$$

dakle da je pomoćni kut Θ upravo kut, k ji zatvara pobočni brid b sa svojom projekcijom b'.

Lako se uvjeravamo, da je i pomoćni kut φ iz t. 1. onaj kut, koji zatvara tražena kateta sa zadanom dijagonalom.

II.

Postupkom, navedenim u I., mogu se rješavati i složeniji zadaci. Na pr.

1. $$t = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{3,2578}{4,3751}}}}$$

Stavimo li

(4) $$\sqrt[6]{\frac{3,2578}{4,3751}} = tg\,\psi,$$

tada je $$t = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\psi}},$$

(4′) $$t = \cos\psi.$$

Kut ψ najzgodnije je iz (4) izračunati logaritamskim putem. Tako je

$$\log tg\,\psi = \frac{1}{6}(\log 3,2578 - \log 4,3751),$$

$$\log tg\,\psi = 9,97866 - 10$$
$$\psi = 43°35'36''.$$

Prema (4′)

$$t = \cos 43°35'36'',$$
$$t = 0,72244.$$

2. $$z = \sqrt{1 - \sqrt[5]{0,48765}}.$$

Ako stavimo

(5) $$\sqrt[10]{0,48765} = \sin\varphi,$$

tada je

$$z = \sqrt{1 - \sin^2\varphi},$$
$$z = \cos\varphi.$$

Iz (5) izračunajmo logaritamskim putem kut φ:

$$\log\sin\varphi = \frac{1}{10}\log 0,48765$$

$$\log\sin\varphi = 9,96881 - 10,$$
$$\varphi = 68°32'38''.$$

Odatle $$= \cos 68°32'38''$$
$$z = 0,36579.$$

III.

1. Izrazi oblika

$$v = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \qquad (0 < u < 1)$$

mogu se također izračunati uvođenjem funkcije pomoćnog kuta, uvaživši da za tangens polovine kuta vrijedi izraz

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}.$$

Na pr.:

$$v = \sqrt{\frac{1 - \sqrt[3]{0,4459}}{1 + \sqrt[3]{0,4459}}}.$$

Stavimo li

(6) $$\sqrt[3]{0,4459} = \cos\varphi,$$

tada je

$$v = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}},$$

(6′) $$v = tg\,\frac{\varphi}{2}.$$

Izračunajmo logaritamski kut φ iz jednadžbe (6):

$$\log\cos\varphi = \frac{1}{3}\log 0,4459,$$

$$\log\cos\varphi = 9,88308 - 10,$$
$$\varphi = 40°11',$$
$$\frac{\varphi}{2} = 20°05'30'';$$

prema (6′) je

$$v = tg\,20°05'30'',$$
$$v = 0,36579.$$

2. Kako bismo, dakle, uvođenjem pomoćnog kuta, izračunali slijedeće izraze:

(a) $$x = \sqrt{(9,378 \cdot 0,49807)^2 - 3,7946^2};$$

(b) $$y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{2,5601}{3,7946}}};$$

(c) $$z = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[5]{69,29}}};$$

(d) $$u = \sqrt{\frac{1 + \sqrt[5]{0,2}}{1 - \sqrt[5]{0,2}}}?$$

Kakvi se algebarski izrazi mogu izračunavati uvođenjem pomoćnog kuta? Da li ti izrazi imaju uvijek svoje geometrijsko značenje i kada?

Vladimir Jirasek, Zagreb

Vježbe iz matematike za prijemni ispit*

za učenike 8. raz. osmog. škole (i 4. raz. gimn.)

PONAVLJANJE IZ NIŽIH RAZREDA

Aritmetika

Izračunaj:

1. $$\frac{9\sqrt{2-\frac{2}{9}}:\frac{1}{9}\sqrt{2-\frac{1}{25}}}{\sqrt{6-\frac{15}{16}}:\frac{1}{12}\sqrt{1+\frac{24}{25}}}.$$

Brojnik je jednak

$$9\sqrt{\frac{16}{9}}:\frac{1}{9}\sqrt{\frac{49}{25}}=9\cdot\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{7}{5}\right)=$$

$$=12:\frac{7}{45}=\frac{540}{7};$$

nazivnik je jednak

$$\sqrt{\frac{81}{6}}:\frac{1}{12}\sqrt{\frac{49}{25}}=\frac{9}{4}:\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{7}{5}\right)=$$

$$=\frac{9}{4}:\frac{7}{60}=9:\frac{7}{15}=\frac{135}{7};$$

zato je razlomak jednak $\frac{540}{7}:\frac{135}{7}=4$. Kako bi se mijenjao rezultat, da ispred drugog korijena u brojniku i nazivniku stavimo točku?

2. $$A=\sqrt{\left(5-\frac{1}{4}+\frac{\frac{3}{4}}{0{,}02}\right)\frac{0{,}0016}{1\frac{5}{4}}+\frac{62}{75}}.$$

Najprije treba da izračunamo $\frac{3}{4}:0{,}02$; to je jednako $\frac{3}{4}:\frac{2}{100}=\frac{300}{8}=\frac{75}{2}$; izraz u zagradi jednak je $\frac{19}{4}+\frac{75}{2}=\frac{169}{4}$;

$$\frac{0{,}0016}{1\frac{5}{4}}=\frac{0{,}04^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2^2\cdot\frac{0{,}04^2}{3^2}.$$

Zato je prvi pribrojnik jednak

$$\sqrt{\frac{169}{4}\cdot 2^2\cdot\frac{0{,}04^2}{3^2}}=\frac{13}{2}\cdot 2\cdot\frac{0{,}04}{3}=\frac{0{,}52}{3},\text{ pa je}$$

$$A=\frac{52}{300}+\frac{62}{75}=\frac{13}{75}+\frac{62}{75}=\frac{75}{75}=1.$$

3. $$A=\frac{0{,}8^3}{0{,}06^2}:\frac{\sqrt{24{,}01}}{\sqrt{0{,}000196}}:\left(\frac{1}{9}-\frac{11}{135}\right).$$

$$\frac{0{,}8^3}{0{,}06^2}:\frac{\sqrt{24{,}01}}{\sqrt{0{,}000196}}=\frac{0{,}512}{0{,}0036}:\frac{4{,}9}{0{,}014}=$$

$$=\frac{5120}{36}:\frac{4900}{14}=\frac{512}{36}\cdot\frac{14}{490}=\frac{128}{9}\cdot\frac{1}{35}=$$

$$=\frac{128}{315};\quad \frac{1}{9}-\frac{11}{35}=-\frac{64}{315};\quad\text{zato je}$$

$$A=\frac{128}{315}:\left(-\frac{64}{315}\right)=-2.$$

4. $A=3a^3-\{5a^2-[6-(4a^3-3a^2+4)-2a]-3a\}$

Pokus za $a=-2$.

Zagrada se možemo riješiti postepeno t. j. najprije okruglih, zatim uglatih i onda vitičastih, ali i odjednom. U tom posljednjem slučaju imamo:

$$A=3a^3-5a^2+6-4a^3+3a^2-4-2a+3a=-a^3-2a^2+a+2.$$

Pokus: treba za $a=-2$ staviti u zadani izraz i izračunati ga. Imamo

$$-24-\{20-[6-(-32-12+4)+4]+6\}=$$
$$-24-\{20-[6-(-40)+4]+6\}=-24-$$
$$-\{2-[6+40+4]+6\}=-24-\{20-$$
$$-50+6\}=-24-(-24)=0.$$

Uvrstimo li za $a=-2$ u rezultat, izlazi $-(-8)-8-2+2=8-8-2+2=0$.

Dakle se pokus slaže.

5. $A=(4a^2-5b^2)^2-(4a^2+5b^2)^2-(5b^2+4a^2)(4a^2-5b^2)$.

Pokus za $a=-3$, $b=-2$.

$$A=16a^4-40a^2b^2+25b^4-16a^4-40a^2b^2-$$
$$-25b^4-16a^4+25b^4=-16a^4-80a^2b^2+25b^4.$$

Prva dva člana mogu se brže izračunati kao razlika kvadrata; ona su jednaka

$$8a^2\cdot(-10b^2)=-80a^2b^2.$$

Pokus:

$A=(36-20)^2-(36+20)^2-(20+36)(36-20)=$
$=256-3136-896=-3776$. Ako te vrijednosti stavimo u rezultat, izlazi $-1296-$
$-2880+400=-3776$.

6. $A=(3a-4b+5c)^2-(6a-3b+2c)^2$.

$A=[(3a-4b)+5c]^2-[(6a-3b)+2c]^2=$
$=(3a-4b)^2+10c(3a-4b)+25c^2-[(6a-$
$-3b)^2+4c(6a-3b)+4c^2]=9a^2-24ab+$
$+16b^2+30ac-40bc+25c^2-36a^2+36ab-$
$-9b^2-24ac+12bc-4c^2=-27a^2+12ab+$
$+7b^2+6ac-28bc+21c^2$.

Zadatak se može izračunati također tako, da se A kao razlika kvadrata napiše kao umnožak zbroja i razlike.

* Za učenike u onim narodnim republikama, gdje se taj ispit održava. A i učenicima ostalih republika mogu te vježbe služiti za ponavljanje i učvršćivanje gradiva.

7. $A = -(3x^2 - 4y^2)^2 - (-4x^2 - 3y^2)^2 - (-x^2 + 4y^2)(-3x^2 - 4y^2)$.

$A = -(9x^4 - 24x^2y^2 + 16y^4) - (16x^4 + 24x^2y^2 + 9y^4) - (9x^4 - 16y^4) = -9x^4 + 24x^2y^2 - 16y^4 - 16x^4 - 24x^2y^2 - 9y^4 - 9x^4 + 16y^4 = -34x^4 - 9y^4$.

8. $A = m(4n - 3m)(-3m - 4n) - n(3m - 4n)(3m - 4n)$.

$A = m(-3m - 4n)(-3m + 4n) - n(3m - 4n)^2 = m(9m^2 - 16n^2) - n(3m - 4n)^2 = 9m^3 - 16mn^2 - 9m^2n + 24mn^2 - 16n^3 = 9m^3 + 8mn^2 - 9m^2n - 16n^3$.

Zadatak se može riješiti i tako, da se izluči zaj. faktor $3m - 4n$; imamo

$A = (3m - 4n)[-m(-3m - 4n) - n(3m - 4n)] = (3m - 4n)(3m^2 + 4mn - 3mn + 4n^2) = (3m - 4n)(3m^2 + mn + 4n^2) = 9m^3 - 9m^2n + 8mn^2 - 16n^3$.

Geometrija

9. Kolika je površina istokračna (ravnokraka) trokuta, komu je krak $b = 100$ *cm*, a baza $a = 192$ *cm*. Kolike su visine, koje pripadaju kracima?

Ako je v_a visina, koja pripada bazi a, to je $v_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ t. j. $v_a^2 = 100^2 - 96^2 = 196 \cdot 4$ i $v_a = 14 \cdot 2 = 28$ *cm*. Prema tomu je površina

$$P = \frac{192 \cdot 28}{2} = 96 \cdot 28 = 2688 \text{ cm}^2.$$

Kako je krak $b = 100$ *cm*, a površina 2688 cm^2, to iz $b \cdot \frac{v_b}{2} = 2688$ izlazi

$$v_b = \frac{2 \cdot 2688}{100} = 53{,}76 \text{ cm}.$$

10. Za koliko je površina pravokutnika stranica $a = 48$ *cm*, $b = 14$ *cm* manja od površine njemu opisane kružnice?

Kako je dijagonala pravokutnika

$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2304 + 196} = \sqrt{2500} = 50$ *cm*,

to je polumjer opisane kružnice 25 *cm*; zato je površina opisane kružnice $25^2\pi \approx 1962{,}5$ cm^2; a kako je površina pravokutnika 672 cm^2, tražena je površina $P \approx 1290{,}5$ cm^2.

11. Neka se opiše kružnica, kojoj je opseg jednak *a*) zbroju, *b*) razlici dviju zadanih kružnica.

Ako su r_1 i r_2 polumjeri zadanih kružnica, to je zbroj opsega tih kružnica $2r_1\pi + 2r_2\pi = 2\pi(r_1 + r_2)$; ako je x polumjer tražene kružnice, izlazi $2\pi x = 2\pi(r_1 + r_2)$ t. j. $x = r_1 + r_2$.

Slično je polumjer pod *b*) tražene kružnice jednak $r_1 - r_2$.

12. Kako bi nacrtao krug, kome je površina jednaka zbroju 2 krugova polumjera r_1 i r_2?

Mora biti $x^2\pi = r_1^2\pi + r_2^2\pi$ t. j. $x^2 = r_1^2 + r_2^2$. Traženi je polumjer dakle jednak hipotenuzi pravokutnog trokuta, kome su katete r_1 i r_2.

13. Kolika je površina istokračna trapeza, kome su šiljasti kutovi 60° i kome su baze 24 *cm* i 18 *cm*.

Visina tog trapeza (nacrtaj sliku) jednaka je visini istostrana trokuta stranice $24 - 18 = 6$ *cm* t. j.

$$v = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Zato je površina trapeza

$$\frac{24 + 18}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 21 \cdot 3\sqrt{3} = 63\sqrt{3} \approx 109{,}116 \text{ cm}^2.$$

14. Kolika je površina kružnog isječka, kome pripada luk od 90°, ako je tom luku pripadna tetiva 20 *cm*.

Iz istokračnog pravokutnog trokuta, komu su katete r i r, a hipotenuza 20 izlazi $2r^2 = 400$, $r^2 = 200$; zato je tražena površina

$$\frac{200\pi}{4} = 50\pi \approx 157 \text{ cm}^2.$$

15. Koliki je opseg romba, komu su dijagonale $d_1 = 24$ *cm* i $d_2 = 32$ *cm*? Kolika je površina rombu upisane kružnice?

Budući da se dijagonale sijeku pod pravim kutom, to je $a^2 = 12^2 + 16^2 = 400$ i $a = 20$ *cm*, $O = 4 \cdot 20 = 80$ *cm*. Površina je romba

$$P = \frac{d_1 d_2}{2} = 12 \cdot 32 = 384 \text{ cm}^2,$$

a kako je ona također jednaka $av = 20v$, to je $v = \frac{384}{20} = 19{,}2$ *cm*, polumjer upisane kružnice je $\rho = \frac{v}{2} = 9{,}6$ *cm*, a površina upisane kružnice $9{,}6^2\pi \approx 289{,}3824$ cm^2.

16. Ponovi dokaze za ove teoreme: *a*) paralelogrami jednakih baza i jednakih visina jesu jednaki; *b*) trokut je jednak polovini paralelograma, koji ima s njim jednaku osnovku i jednaku visinu; *c*) trapez je jednak trokutu, kome je baza jednak zbroju paralelnih stranica trapeza, a visina jednaka visini trapeza; *d*) trapez je jednak paralelogramu, kome je baza jednaka srednjici trapeza, a visina jednaka visini trapeza. Na osnovu tih poučaka izreci pravila za određivanje površina paralelograma, trokuta i trapeza.

Naknadno stigla ova rješenja:

a) iz matematike:

Iliškovi ć Aleksandar, uč. 8б raz. g. Doboj, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 215; *Васковарџић Станко*, уч. 6 р. г. Трстеник, 209; *Протић Милутин*, уч. 8 р. г. Трстеник, 210; *Стојановски Петар*, уч. 8 кл. г. Битола, све задатке од 204—215.

b) iz fizike:

Илишковић Алаксандар, уч. 8б р. г. Добој, 117, 118 (приближно), 119.

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo **»Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.**

Svim suradnicima!

Molimo sve suradnike, da crteže uz članke izrađuju uredno, pregledno i točno, po mogućnosti tušem na posebnom papiru.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, gimnaziju i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE IZDAJE ČASOPIS

GLASNIK
MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

Pretplata za 1956. godinu iznosi Din 480 i šalje se na administraciju GLASNIKA:
Hrvatsko prirodoslovno društvo — Zagreb, Ilica 16/III.
Čekovni račun 406-T-767 za Društvo matematičara i fizičara NRH
Godišnja članarina za društvo je Din 240. — Članovi primaju Glasnik uz nadoplatu Din 240

ВЕСНИК ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА НР СРБИЈЕ

Претплата од 400 Дин шаље се Друштву мат. и физ. НР Србије, Београд преко чек. рачуна 102-Т-119 (уз назнаку да је за „Весник“). Сву преписку слати на адресу Друштва, Београд, пошт. фах 791.

Pretplaćujte se na

POPULARNO-ILUSTROVANI ČASOPIS
HRVATSKOG PRIRODOSLOVNOG DRUŠTVA

»PRIRODA«

»PRIRODA« objavljuje poučne članke o zanimljivim prirodnim pojavama, popularizira sve grane prirodnih nauka, donosi posljednje novosti i otkrića iz nauke i tehnike u svijetu i kod nas te je od neocjenjive koristi s jedne strane nastavnicima u prosvjetnom radu u školi i izvan nje, a s druge strane pomaže omladini da postigne svoje temeljitije obrazovanje.

»PRIRODA« izlazi godišnje u 10 brojeva i to pojedinih brojeva u latinici i ćirilici. Pretplata iznosi godišnje Din 400, za đake Din 260. Povjerenici na školama, koji primaju više primjeraka časopisa mogu obračunavati i mjesečno.

Pretplatu prima Hrvatsko Prirodoslovno Društvo, Zagreb, Ilica 16/III. Poštanski pretinac 165. — Čekovni račun 406-T-819.

Savez Društava matematičara i fizičara FNRJ izdaje časopis

NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE

Pretplata iznosi 200 Din, a pojedini broj 60 Din. Pretplatu i narudžbe slati izdavačkom poduzeću »Nolit«, Beograd, Narod. fronta 76, na ček. račun br. 1031-T-627 sa naznakom za časopis »Nastava mat. i fiz.«.

Za Narodnu Republiku Hrvatsku pretplata se šalje na ček. upl. 406-T-1144 ili uputnicom Hrv. prirodosl. društvo, Zagreb, Ilica 16/III. kat uz naznaku da je za »Nastavu«
Za GODINU 1956. PRETPLATA ĆE IZNOSITI DIN 300

Društvo matematikov in fizikov LRS izdaja

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Naročnino 250 Din nakažite na čekovni račun pri Narodni banki, Ljubljana, štev. 604-T-207 za Društvo matematikov in fizikov LRS. Dopise pošiljate in list naročajte na naslov: Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, pošt. predal 253.

БИЛТЕН **на друштвота на математичаре ин физичарите од Нагодна Република Македонија**

СВЕ ИНФОРМАЦИЈЕ ДАЈЕ „ДРУШТВО МАТ. ФИЗ. НР МАКЕД., СКОПЈЕ“